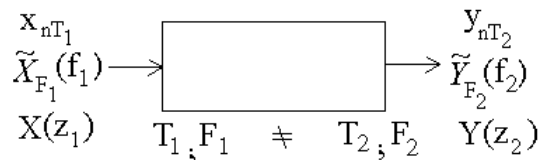

5. SEBESSÉGGONVERZIÓS JELFELDOLGOZÁS	2
5.1 Egész arányú sebesség csökkentés	2
5.1.1 Minta ritkítás (újra-mintavételezés)	2
5.1.2 Decimálás	5
5.2 Egész arányú sebesség növelés	7
5.2.1 Nullmintával sűrítés	7
5.2.2 Mintaismétlő sűrítés (nulladfokú interpolálás)	8
5.2.3 Elsőfokú (vonalmonti) interpolálás	9
5.2.4 Sávhatárolt interpoláció	10
5.3 Nem egész arányú sebességkonverziós eljárások	11
5.4 Alulmintavételezés	12
5.4.1 Aluláteresztő szűrős megoldás	12
5.4.2 Sávszűrős alulmintavételezés	13
5.4.3 Alulmintavételezés modulátorral	14
5.5 Túlmintavételezés	15
5.5.1 A/D átalakítás túlmintavételezéssel	15
5.5.2 D/A átalakítás túlmintavételezéssel	16
5.6 Szűrőbankok	17
5.6.1 DFT szűrőbank	18
5.6.2 QMF szűrőbank	21

5. Sebességkonverziós jelfeldolgozás

Definíció:

Sebességkonverziós jelfeldolgozásról akkor beszélünk, ha a bemeneti és a kimeneti számsorozat mintavételi ideje, és így az órajele, nem egyenlő.



Az F órajelű jel spektruma F -szerint periodikus. **Alapsávnak** a $-F/2 \dots F/2$ periódushossznyi frekvencia intervallumot nevezzük. Diszkrét idejű jeleket az alapsáv-beli spektrumuk teljesen meghatározzák. A különböző sebességű jeleknek különböző az (alap)sávszélessége, sebesség konverzió esetén, tehát sávszélesség változtatásról is szó van, a frekvencia tartományi analízis feladata a különböző alapsávi spektrális tartalmak viszonyának meghatározása lesz.

Felhívjuk a figyelmet arra, az előzetesen igaznak feltételezett dogmára, mely szerint a jelfeldolgozási műveletek során a spektrumátlapolódás a továbbiakban jóvátehetően jel-degenerációt eredményez, mindig ennek az elkerülésére, kivédésére minimalizálására kell elsősorban törekednünk.

A továbbiakban az egyszerűbbektől az összetettebbek felé haladva definiáljuk és elemezzük a különböző nevezetesebb jelfeldolgozási eseteket.

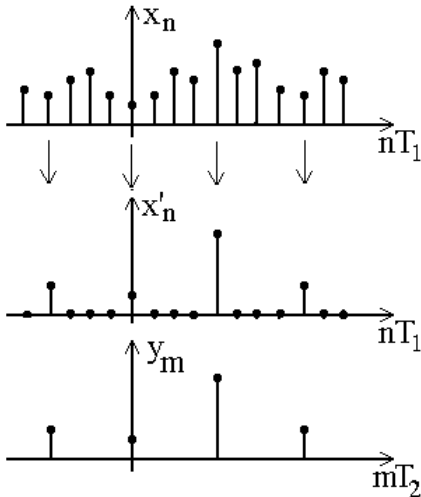
5.1 Egész arányú sebesség csökkentés

Legyen a bemenő x_n sorozat mintavételi ideje T_1 . órajele $F_1 = 1/T_1$. Az N arányú sebességcsökkentés azt jelenti, hogy a kimeneti jellemzőkre írhatjuk: $T_2 = N T_1$, $F_2 = F_1 / N$, a kimeneti sávszélesség a bemeneti N -ed része.

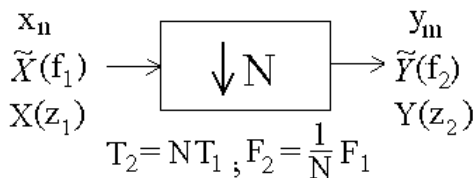
5.1.1 Minta ritkítás (újra-mintavételezés)

A legkézenfekvőbb eset: a kimeneti, kisebb sebességű y_m számsorozat tagjai a nagyobb sebességű x_n számsorozat N -edik mintái, azaz az időtartományi differencia egyenlet:

$$y_m = x_{mN}, \quad m = -\infty \dots +\infty.$$



A fentiek szerint működő input-output rendszert **mintaritkító**nak nevezzük és külön rajzjelet vezetünk be számára:



A fentebb definiált mintaritkító alapvető tulajdonságait illetően az alábbiakat állapíthatjuk meg:

- lineáris rendszer
- nem invariáns rendszer
- memóriamentes rendszer

Eddig a mintaritkítót idő-tartománybeli viselkedése alapján definiáltuk. A továbbiakban vizsgáljuk meg a frekvencia tartományi működését: a bemenetére érkező $X(f)$ spektrumtól hogyan függ a kimeneti $Y(f)$ spektrum.

A mintaritkító frekvenciatartományi analiziséhez vezessük be az eredeti nagysebességű bemenettel azonos sebességű, de csak minden N -edik mintában nem nulla mintákat tartalmazó x'_m jelet:

$$x'_n = \begin{cases} x_n, & \text{ha } n = k \cdot N, \text{ } k \text{ egész} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

A kimeneti spektrumra írhatjuk:

$$Y(f) = \mathcal{F}\{y_m\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m e^{-2\pi m f T_2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m e^{-2\pi m N f T_1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x'_m e^{-2\pi m f T_2} = \mathcal{F}\{x'_m\} = X'(f)$$

Továbbá:

$$x'_n = w_n x_n, \text{ ahol } w_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = k \cdot N, \text{ } k \text{ egész} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Az N-ed rendű egységgyökök szimmetria tulajdonságai miatt írhatjuk:

$$w_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi n m}{N}}, \text{ } n = -\infty \dots \infty$$

Tehát:

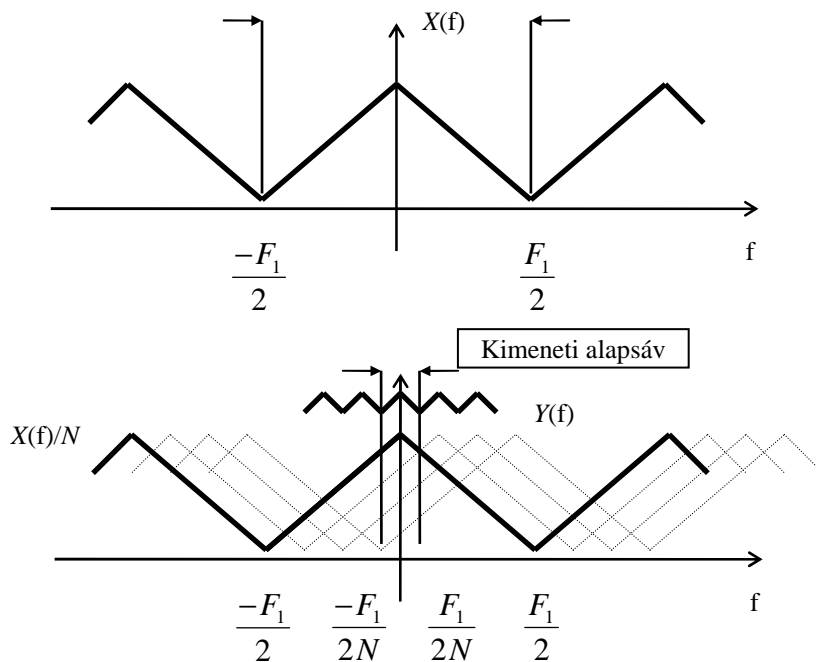
$$Y(f) = \mathcal{F}\{x'_m\} = \mathcal{F}\{w_n x_n\} = \mathcal{F}\left\{ \left(\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi n m}{N}} \right) x_m \right\} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \mathcal{F}\left\{ \left(e^{-j \frac{2\pi m}{N}} \right)^n x_n \right\}$$

azaz

$$Y(f) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X\left(f - m \frac{F_1}{N}\right)$$

vagyis az eredetileg F_1 szerint periodikus $X(f)$ spektrumból a kimeneti $F_2 = F_1/N$ óra szerinti kisebb periódusnak megfelelő $Y(f)$ periodikus spektrumot úgy kapjuk, hogy a széles (alap)sávú bemeneti spektrum $F_2 = F_1/N$ szélességű szegmenszei mind belapolódnak a kimeneti keskenyebb, F_2 szélességű alapsávba.

Rajzon szemléltetve az eredményt:



Tehát a kimeneti alapsáv a bemeneti alapsáv N -ed része. A kimeneti spektrumot úgy kapjuk, hogy a bemeneti spektrumot N -szer eltoljuk F_1/N -nel. Látható tehát, hogy a mintaritkítás, általában *spektrum átlapolódással* jár. Ez csak abban az esetben nem következik be, ha az egyébként átlapolódó spektrális komponensek nullák lennének, azaz a bemeneti nagysebességű jel spektruma nem foglalja el a teljes lehetséges sávszélességet, hanem annak csak egy F_1/N -ed részére korlátozódik.

Mintaritkító operátor-tartományi működését ARMA jelek esetén (legalább is a pólusokat illetően) könnyen áttekinthetjük. A bemeneti jel pólus-zérus képe alapján meghatározható a kimeneti jel pólus-zérus képe is. Ehhez a következő gondolatmenetet kell belátni:

- a bemeneti számsorozat a p_i pólusaihoz tartozó exponenciális sorozatok súlyozott összege,
- p_i kvociensű exponenciális sorozat N arányú ritkítettje is exponenciális sorozat, p_i^N kvocienssel.
- a kimeneti jel pólusai tehát a bemeneti pólusok N -edik hatványai,
- a kimeneti jel zérusait nem ilyen egyszerűen kapjuk: a kimeneti pólusokhoz tartozó résztörtek összegeként kapott számláló polinom gyökei lesznek a kimeneti zérusai.

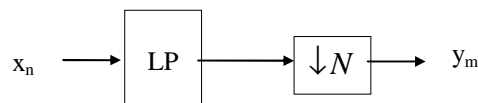
5.1.2 Decimálás

Az egészarányú decimálás definíciója: spektrum átlapolódás mentes, egész arányú sebesség csökkentés.

A decimálás, tehát a jelfeldolgozás szempontjából korrekt, egészarányú sebesség csökkentő eljárás, ehhez az kell, hogy a kimeneti keskenyebb alapsávba ne történjen átlapolódás, azaz az oda más frekvenciákról áttevődő spektrum-komponensek már nullák legyenek, tehát decimálás esetén a mintaritkítást meg kell, hogy előzze egy, a bemeneti nagy sebességgel működő, de a kimeneti keskeny alapsávban áteresztő u.n. decimáló szűrő

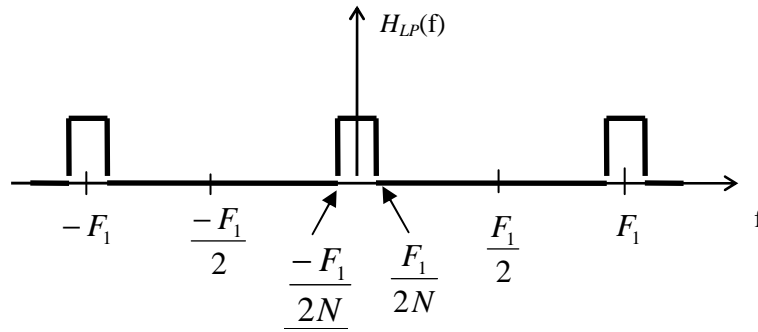
DECIMÁLÁS = SZŰRÉS + MINTARITKÍTÁS

Rajzban:



A decimáláshoz szükséges alul áteresztő szűrőt anti aliasing szűrőnek is nevezik.

Az ideális decimáló LP aluláteresztő szűrő $H_{LP}(f)$ frekvenciaátviteli karakterisztikája az alábbi ábra szerinti legyen:



Feladat:

Határozzuk meg az **ideális decimáló szűrő** h_n impulzusválasz sorozatát, vagyis azt a számsorozatot, mellyel a bemeneti sorozatot konvolválva az ábrán látható ideális aluláteresztő szűrő karakterisztikát realizálnánk!

Megoldás:

Az átviteli karakterisztika a h_n impulzusválasz sorozat diszkrét idejű Fourier transzformáltja:

$$H(f) = \mathcal{F}\{h_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-j2\pi n f T_1}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $\cdot e^{j2\pi k f T_1}$ -vel, majd integráljuk egy periódusra $\int_{-F_2/2}^{F_2/2} (\cdot) df$

$$\int_{-F_2/2}^{F_2/2} H(f) e^{j2\pi k f T_1} df = \int_{-F_2/2}^{F_2/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{j2\pi(k-n)fT_1} df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \int_{-F_2/2}^{F_2/2} e^{j2\pi(k-n)fT_1} df .$$

Mivel

$$\int_{-F_2/2}^{F_2/2} e^{j2\pi(k-n)fT_1} df = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq n \\ F_2, & \text{ha } k = n \end{cases} , \text{ ezért } \int_{-F_2/2}^{F_2/2} H(f) e^{j2\pi k f T_1} df = h_k \cdot F_2 .$$

Tehát:

$$h_n = \frac{1}{F_2} \cdot \int_{-F_2/2}^{F_2/2} H(f) e^{j2\pi n f T_1} df = \frac{1}{F_2} \int_{-F_2/2}^{F_2/2N} e^{j2\pi n f T_1} df = \frac{1}{F_2} \left[\frac{e^{j2\pi n f T_1}}{j2\pi n T_1} \right]_{-F_1/2N}^{F_1/2N} = \boxed{\frac{\sin \pi \frac{n}{N}}{\pi \frac{n}{N}}} .$$

Megjegyezzük, hogy a kapott $h_n = \frac{\sin(\pi n / N)}{\pi n / N}$ számsorozat mint az ideális aluláteresztő szűrő $H(f)$ átviteli frekvencia-karakterisztikájának inverz Fourier transzformáltjaként (IDTFT) kaptuk, azaz ezek a számok az $1/N$ kitöltési tényezőjű négyszög hullám Fourier együtthatói.

Ez a számsorozat természetesen nem kauzális, nem FIR és nem is stabil (nem abszolút összegezhető, mert ez a $H(f)$ nem folytonos, nem differenciálható), reális szűrőként ennek valamilyen végestartójú részsorozatából lehet kiindulni. Decimáló FIR szűrők implementálása során mindig figyelembe veendő, hogy azt egy mintaritkító követi, tehát eleve a nagysebességű szűrőnek csak minden N -edik mintáját kell valóban előállítania, kiszámítania.

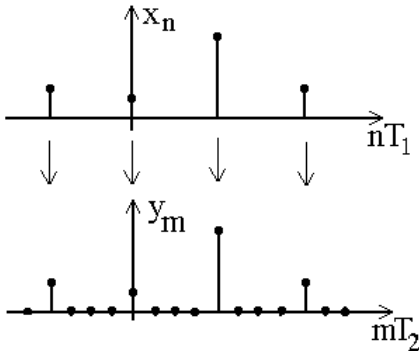
5.2 Egész arányú sebesség növelés

A bemeneti jel mintavételi ideje legyen N -szer nagyobb a kimeneti jelénél:

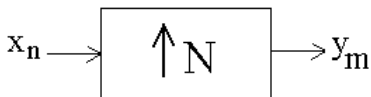
$$F_2 = N \cdot F_1 \text{ és } T_2 = \frac{1}{N} \cdot T_1.$$

5.2.1 Null-mintával sűrítés

A sebességnövelés legegyszerűbb megoldása a null-mintákkal történő sűrítés:

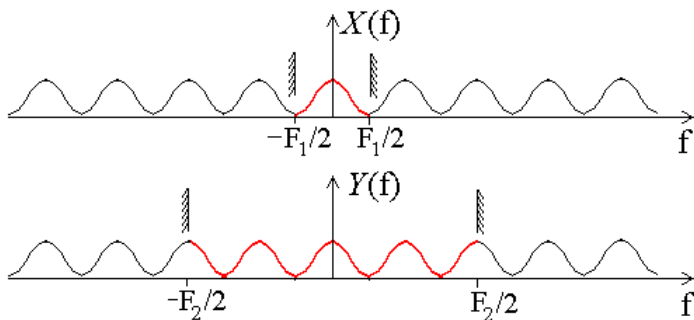


A null-mintával sűrítő jele:



$$y_m = \begin{cases} x_{m/N}, & \text{ha } m = k \cdot N \\ 0, & \text{ha } m \neq k \cdot N \end{cases} \quad (k \text{ egész szám})$$

A null-mintával sűrítő kimeneti spektruma a 5.1.1-ben leírtak alapján megegyezik a bemeneti spektrummal: $X(f) = Y(f)$. Azonban a spektrum értelmezésében mégis különbség van.



Ugyanis míg $X(f)$ F_1 szerint periodikus, addig $Y(f)$ $F_2 = N F_1$ szerint, és ezáltal $Y(f)$ alapsávi tartományában nem csak az $X(f)$ alapsávi tartalma van benne, hanem ennek F/N egészszámú eltoljtjai

is (image-ek), így a kimenet alapsávjának tartalma lényegesen különbözik a bemeneti alapsávi tartalomtól, és ez a jelfeldolgozás szempontjából nagyon lényeges torzítást jelent.

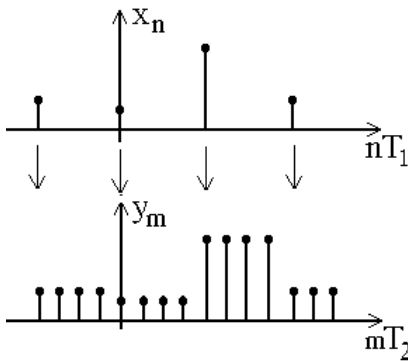
Az ideális eset az lenne, ha a kimeneti (szélesebb) alapsáv csak a bemeneti alapsávi spektrumot tartalmazná (image mentes sebességnövelés), de azt torzítás mentesen.

A z-transzformáltak közötti összefüggés:

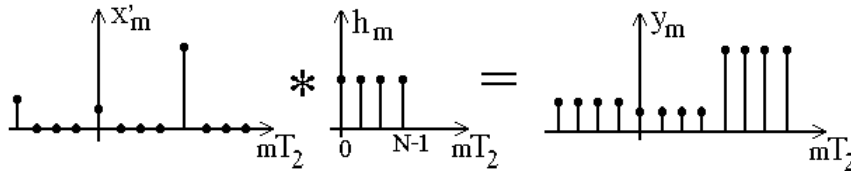
$$X(z_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z_1^{-n} \text{ és } Y(z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m z_2^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z_1^{-nN} \rightarrow z_2^{-N} = z_1^{-1} \rightarrow \boxed{z_2^N = z_1}.$$

5.2.2 Mintaismétlő sűrítés (nulladfokú interpolálás)

A sebességnövelés egy másik megoldása, hogy null-minták helyett az utolsó minta értékét ismételjük (diszkrét idejű, nulladrendű tartó):



Ha először null-mintákkal sűrítjük bemenő (x_n) jelet, majd az így kapott T_2 mintavételi idejű (x'_m) jelet konvolváljuk egy véges (N) tartójú egységsorozattal, akkor pontosan a kívánt (y_m) mintaismétléses jelsorozatot kapjuk:



Ezzel a mintaismétlő sűrítő:

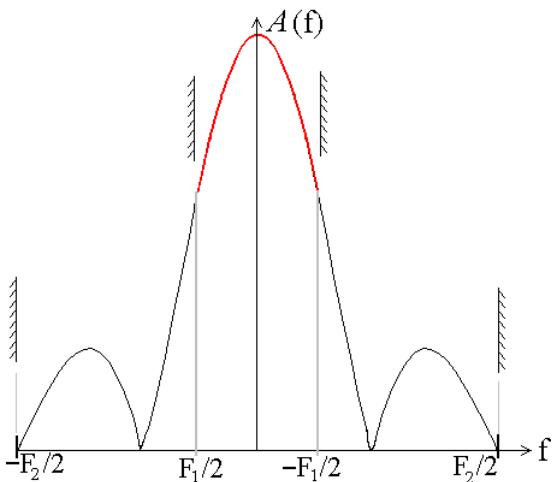
$$x_n \rightarrow \boxed{\uparrow N} \rightarrow x'_m \rightarrow \boxed{h_n} \rightarrow y_m, \text{ ahol}$$

$$h_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq n < N \\ 0, & \text{ha } n < 0, n \geq N \end{cases}$$

$X(f) \cdot H(f) = Y(f)$, ahol $H(f)$ h_n z-transzformáltja segítségével adható meg:

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h_n\} = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-N} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{-\frac{N}{2}}}{z^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{z^{\frac{N}{2}} - z^{-\frac{N}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}} = z^{-\frac{(N-1)}{2}} \cdot \frac{z^{\frac{N}{2}} - z^{-\frac{N}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}}}$$

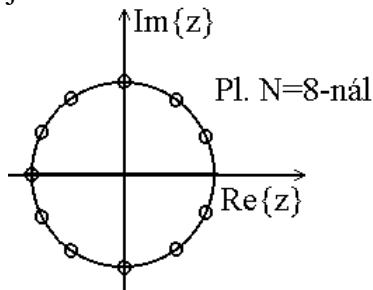
$$\Rightarrow H(f) = H(z)|_{z=e^{j2\pi Tf}} = e^{-j2\pi \frac{(N-1)}{2} Tf} \cdot \frac{\sin \pi N T f}{\sin \pi T f} = A(f) \cdot e^{j\varphi(f)} \quad (T = T_2) \rightarrow A(f) = \left| \frac{\sin \pi N T f}{\sin \pi T f} \right|$$



Mivel $A(f)$ az ábrán látható alakú, a kimeneti spektrum nem lesz azonos a bemeneti spektrummal. A kimeneti spektrum alapsávi tartományában az image tartalom csökkentett lesz, de a bemeneti spektrum alapsávi tartománya is (lineárisan) torzítottan jelenik meg a kimeneti spektrumban ($A(f)$ pirossal jelölt szakasza miatt).

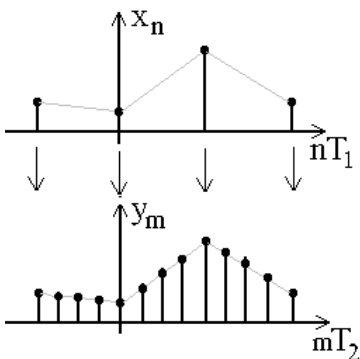
Megjegyzés:

A kimeneti jel z -transzformáltja: $Y(z_2) = X'(z_2) \cdot H(z_2)$. $H(z_2)$ -nek a $z = 1$ pontban lévő pólusát a számláló első egységgyöke kiejti $\rightarrow N-1$ zérusa van. $\Rightarrow N-1$ zérus is megjelenik a kimeneti jelben:



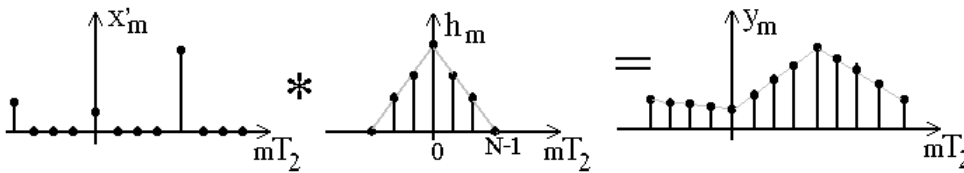
5.2.3 Elsőfokú (vonalmenti) interpolálás

Az előző pont gondolatmenetét folytatva, a bemeneti minták közé eső kimeneti mintákat számítsuk a két minta által meghatározott lineáris függvénnyel (elsőrendű tartó):

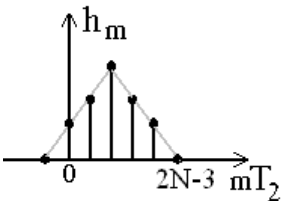


Ha először null-mintákkal sűrítjük a bemenő (x_n) jelet, majd az így kapott T_2 mintavételi idejű (x'_m)

jelet konvolváljuk az ábrán látható háromszögjellel, akkor pontosan a kívánt (y_m) mintaismétléses jelsorozatot kapjuk:



Ahhoz, hogy kauzális legyen h_m toljuk el pozitív irányban $N-2$ ütemmel:



Kérdés, hogy most milyen lesz az $X'(f) \cdot H(f) = Y(f)$ kimeneti spektrum. Vegyük észre, hogy a fenti h_m nem más, mint a 5.2.2 pontban alkalmazott egységnyi véges (N) tartójú impulzussorozat önmagával vett konvolúciója. Éppen ezért:

$$A(f) = H(f) = \left| \frac{\sin \pi N T f}{\sin \pi T f} \right|^2 . \Rightarrow A \text{ kimeneti spektrum alapsávi tartományában a felharmonikus tartalom}$$

(pontosabban image-tartalom) még jobban csökkentett lesz, de a bemeneti spektrum alapsávi tartománya továbbra is (lineárisan) torzítottan jelenik meg a kimeneti spektrumban.

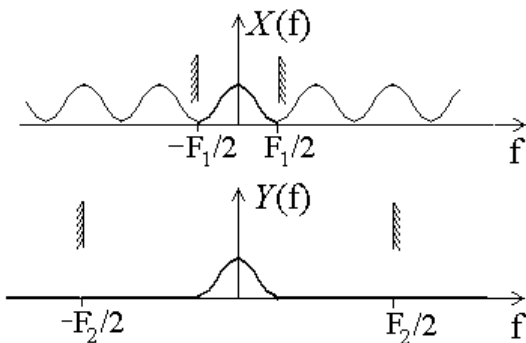
Megjegyzés:

A felharmonikus tartalom további csökkentése érdekében a 5.2.2 alfejezet véges impulzussorozatát nemcsak kétszer, hanem többször (pl. q -szor) is konvolválhatjuk önmagával.

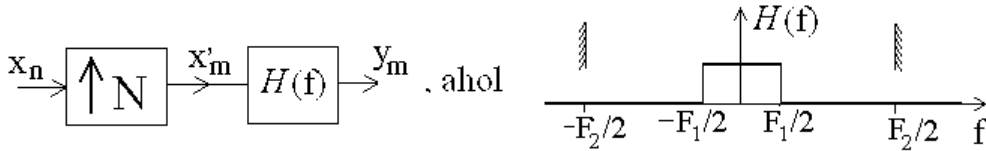
$$\Rightarrow A(f) = H(f) = \left| \frac{\sin \pi N T f}{\sin \pi T f} \right|^q . \text{ Ekkor } q\text{-adfokú interpolációról beszélünk.}$$

5.2.4 Sávhatárolt interpoláció

Az előbbi sebességnövelő eljárásoknál az volt a baj, hogy a kimenet alapsávi tartományában megjelentek a bemeneti spektrum alapsávi tartományának eltoltjai, image-jei összetevői is. Ezt a 5.2.2. és 5.2.3-as pontokban valamelyest csökkenteni tudtuk, de meg nem szüntettük, ráadásul lineáris torzítás is fellépett. Az ideális megoldás az ábrán látható lenne:



Ez az ún. sávhatárolt interpoláció, a (klasszikus) interpoláció, amely értelemszerűen egy N -szeres null-mintasűrítő és egy T_2 órával működő $F_1/2$ határfrekvenciájú ideális aluláteresztő szűrő összekapcsolásával valósítható meg:



Feladat:

Határozzuk meg az *ideális interpoláló szűrő* (\uparrow) h_n impulzusválasz sorozatát!

Megoldás:

Ugyan az mint a decimáló szűrőnél.

Interpoláló FIR szűrők implementálása során mindig vegyük figyelembe, hogy azt egy null-mintákkal sűrítő előzi meg, tehát a nagysebességű szűrőnek csak minden N-edik bemeneti mintája nem nulla, így ezeket a szorzásokat, összeadásokat nem kell végrehajtani.

5.3 Nem egész arányú sebességkonverziós eljárások

Legyen a bennő x_n sorozat mintavételi frekvenciája F_1 . a kimeneti y_n sorozaté pedig

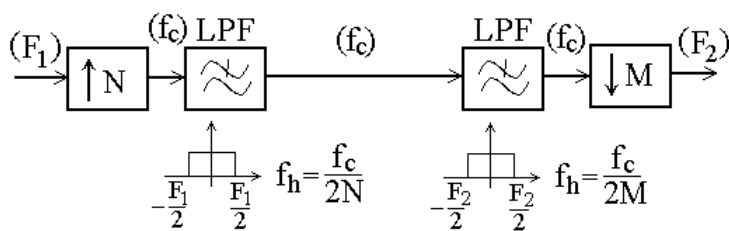
$$F_2 = (N/M) \cdot F_1$$

Racionális tört arány esetén mindig létezik az f_c **legkisebb közös többszörös** frekvencia:

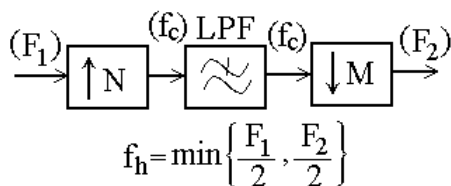
$$f_c = N \cdot F_1 = M F_2$$

Célunk, hogy a jel átlapolódás- (aliasing) és image-mentesen jusson át ezen a sebesség váltó rendszeren.

A megoldás: először interpoláljunk F_1 -ről f_c -re, majd decimáljunk f_c -ről F_2 -re:



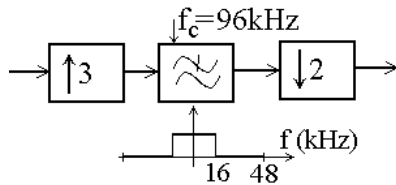
A két alul-áteresztőt összevonva



Példa:

Tervezzünk $f_1 = 32\text{kHz} \rightarrow f_2 = 48\text{kHz}$ -es sebességkonvertálót!

A két frekvencia legkisebb közös többszöröse: $f_c = 96\text{kHz} \Rightarrow 3f_1 = 2f_2$. A szűrő törésponti frekvenciája: $f_h = \min\{16\text{kHz}, 24\text{kHz}\} = 16\text{kHz}$.

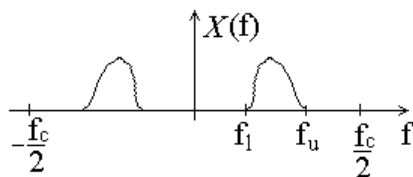


Megjegyzés:

Sebességkonverziós rendszerekben tipikusan non-rekurzív (FIR) szűrőt alkalmaznak, mert ennél az egy másodpercre eső műveletszám jelentősen csökkenthető azáltal, hogy a bemeneten (a null-mintákkal való sűrítés miatt) csak minden N-edik minta nem nulla, továbbá (a kimeneti decimálás miatt) csak minden M-edik kimeneti értéket kell kiszámítani. Mivel az IIR szűrőben visszacsatolás is szerepel, ezért minden f_c ciklusban ki kell számítani az eredményt.

5.4 Alulmintavételezés

Ha adott egy f_c sebességű x_n jel, amelynek alapsávi spektrumában csak egy keskenyebb sávban vannak nullától különböző komponensek, akkor x_n -t részsávúnak mondjuk:



A részsávú spektrummal rendelkező jeleket sokkal hatékonyabban fel lehet dolgozni alacsonyabb mintavételi frekvenciával. Erre három módszert fogunk vizsgálni:

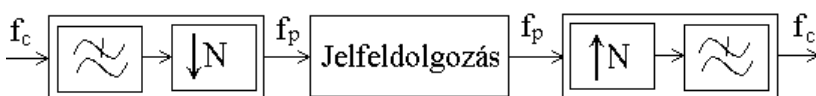
- aluláteresztő szűrő alkalmazásával,
- sávszűrő alkalmazásával,
- modulátorral.

5.4.1 Aluláteresztő szűrős megoldás

Minthogy $X(f)$ f_u frekvenciánál magasabb összetevőket nem tartalmaz, ezért az f_c mintavételi frekvenciáról áttérhetünk az $f_p > 2f_u$ ($f_u < f_c$) mintavételi frekvenciára. (Ekkor az újra mintavételezett jelben nem lesz átlapolódás.) Hogy a jelben biztosan ne legyenek f_u -nál magasabb frekvencia összetevők, azt aluláteresztő szűrővel biztosítjuk

A sebességcsökkentési arány: $\frac{f_c}{f_p} \leq \frac{f_c}{f_u}$. Ha ez egész szám (pl. N), akkor a kisebb sebességre történő

átterést egy decimáló valósítja meg, a visszaalakítást pedig egy interpoláló:



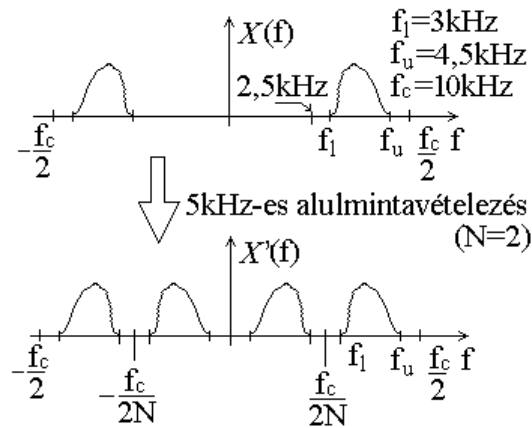
5.4.2 Sávszűrős alulmintavételezés

Osszuk fel N részre a bemeneti spektrum $[0, f_c/2]$ sávját, úgy hogy egy $f_c/(2N)$ szélességű sávba (integer részsávok) beleférjen a bemenőjel spektrumának feldolgozandó (f_l, f_u) tartománya. Ez formálisan azt jelenti: keressük azt a maximális N -et, emelynél

$$\exists k \text{ egész szám, hogy } (f_l, f_u) \subset \left(k \frac{f_c}{2N}, (k+1) \frac{f_c}{2N} \right).$$

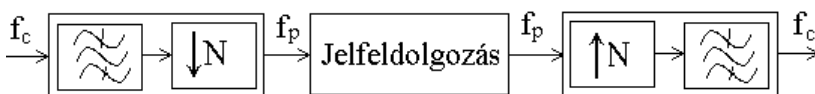
A feladatot megoldva kapunk egy N optimális felosztást és egy k számot. Ezt követően, ha biztosítjuk egy $\left(k \frac{f_c}{2N}, (k+1) \frac{f_c}{2N} \right)$ áteresztő sávú sávszűrővel, hogy ezen a tartományon kívül ne legyenek jelkomponensek, akkor egy f_c/N -es frekvenciájú alul-mintavételezéssel kapott spektrum átlapolódás mentes lesz.

Pl.



Látható, hogy az X' alul-mintavételezett jel alapsávi tartományába fordított állással ugyan, de benne van az eredeti jel spektruma. (Hogy fordított v. azonos állású lesz-e a spektrum, az attól függ, hogy páros vagy páratlan részsávba esik-e az (f_l, f_u) tartomány.)

A jel rekonstruálása egy N -szeres null-mintákkal való sűrítő és egy sávszűrő (interpoláló szűrő) összekapcsolásával történik:



A sebességcsökkentés mértéke: $f_p = \frac{f_c}{N}$.

$$\Rightarrow \text{Cél: max } N = ? : f_l \geq k \frac{f_c}{2N} \text{ és } f_u \leq (k+1) \frac{f_c}{2N}.$$

Feladat:

$$f_c = 200\text{kHz}$$

$$f_l = 81\text{kHz}, f_u = 89\text{kHz}.$$

$$N = ?$$

Megoldás:

$$f_u - f_l = 8\text{kHz} \geq \frac{f_c}{2N} \Rightarrow N < 12,5\text{kHz}, N_{\max} = 12.$$

Tf.: $N = 12$. Ekkor az első egyenlőtlenségből: $\frac{f_l}{f_c} 2N = \frac{12 \cdot 81}{100} = 9,72 \geq k \rightarrow k = 9$.

Ellenőrizzük a második egyenlőtlenség teljesülését: $89 \cdot 12 \leq (9 + 1) \cdot 100$, ez nem teljesül, ezért csökkentünk N -et eggyel, majd végezzük el újra a fentieket.

A jó eredményt $N = 10$ -nél kapjuk. Tehát az egész részarányú sávszűrővel 10-szeres sebességcsökkentés érhető el.

(Ha csak aluláteresztő szűrőt alkalmaztunk volna, akkor csak $N = 2$ -es arányú sebességcsökkentést tudtunk volna elérni.)

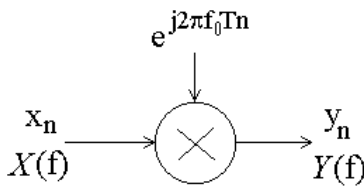
5.4.3 Alul-mintavételezés modulátorral

Vezessük be a következő jelöléseket:

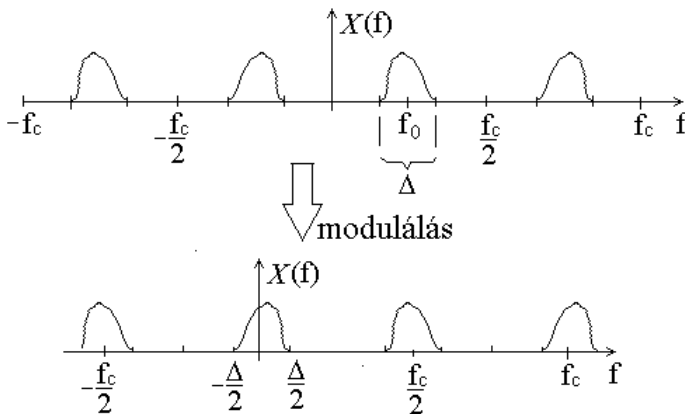
$$f_0 = \frac{f_u + f_l}{2} \text{ (sávközépi frekvencia) és}$$

$$\Delta = f_u - f_l \text{ (sáv szélesség).}$$

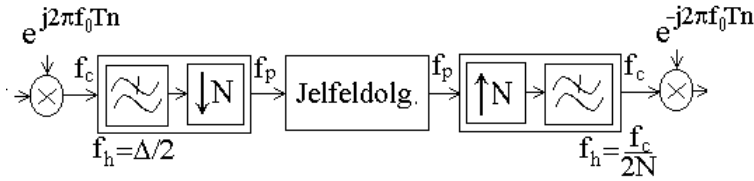
Az első fejezetből tudjuk, hogy a harmonikus ($e^{j2\pi f_0 T n}$) jellel való szorzás a spektrumot eltolja:



$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \cdot e^{-j2\pi f T n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot e^{j2\pi f_0 T n} \cdot e^{-j2\pi f T n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot e^{j2\pi n T (f - f_0)} = X(f - f_0)$$



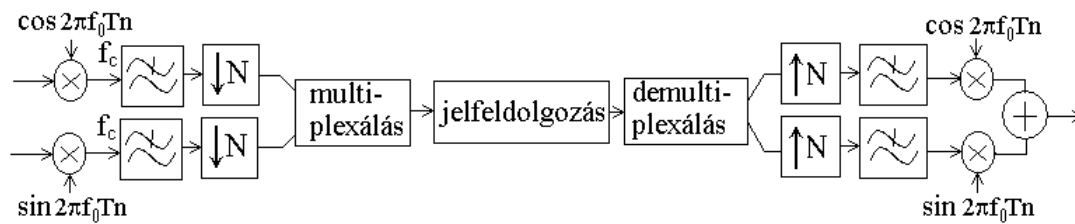
Ekkor látható, hogy egy $f_h = \Delta/2$ határfrekvenciájú aluláteresztő szűrés után, az $N \leq f_c/\Delta$ mértékű mintaritkítás nem okoz átlapolódást. A rekonstrukció egy N -szeres interpolálással és demodulálással történik:



A sebességcsökkentés mértéke: $f_p = f_c/N$, ahol N a legnagyobb olyan egész szám, amelyre $N \leq f_c/\Delta$.

Megjegyzés:

- Az előző pontban lévő példánál, ha modulátort használnánk, akkor $N=200/8=25$ -szörös sebességgyorsítás érhető el.
- A fenti modulátoros jelfeldolgozási struktúránál komplex szorzásokra van szükség. Ez az ún. kvadrátúra-modulátorral válóssá tehető:

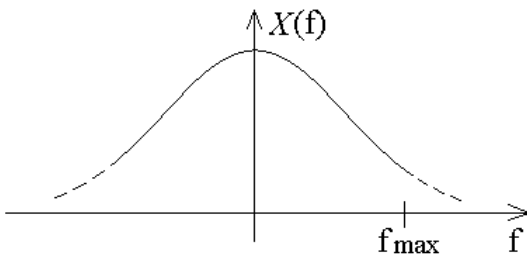


5.5 Túl-mintavételezés

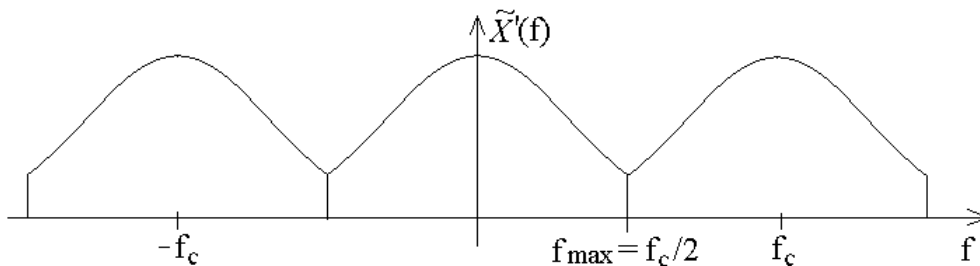
Leggyakrabban az analóg-digitális és a digitál-analóg átalakítóknál alkalmazzák.

5.5.1 A/D átalakítás túl-mintavételezéssel

Legyen a bemeneti $x(t)$ jel spektruma az alábbi alakú:



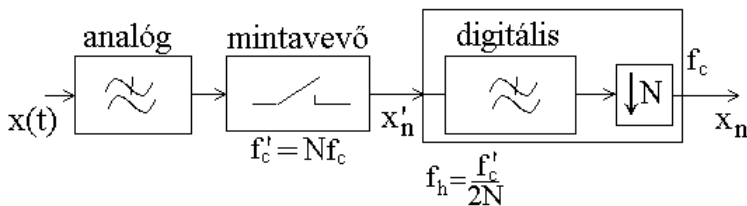
Ha sávhatároljuk a jelet egy $f_h = f_{max} = f_c/2$ határfrekvenciájú ideális aluláteresztő szűrővel, és f_c -vel mintavételezzük a jelet, az alábbi periodikus spektrumhoz jutunk:



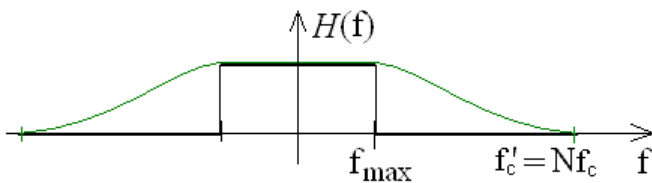
Természetesen a valóságban ideális aluláteresztő szűrő nem létezik, mindig van egy átmeneti

tartomány \rightarrow nagyobb mintavételi frekvenciát kell alkalmazni. A jelfeldolgozásnál viszont az a cél, hogy minél kisebb legyen f_c . Vegyük észre, hogy a bemeneti sávhatároló szűrő analóg(!). Nagy amplitúdó-szelektivitású analóg szűrőt nagyon nehéz csinálni, ráadásul a tulajdonságai sem jók.

A megoldás az, hogy a sávhatárolást végezzük egy kis meredekségű analóg szűrővel és alkalmazzunk jóval nagyobb ($N \cdot f_c$) mintavételi frekvenciát (*túl-mintavételezés*), hogy ne legyen átlapolódás. Ezután egy $N \cdot f_c$ -vel működő digitális szűrővel valósítuk meg az $f_{\max} = f_c/2$ sávhatárolást. Ezt követően már átlapolódásmentesen végezhetjük el az N -szeres decimálást. A végeredmény megegyezik azzal, mintha egy nagy meredekségű analóg sávhatárolás után végeztük volna el az f_c -vel való mintavételezést. Ezzel a túl-mintavételezéses technikájú A/D átalakító vázlatát:



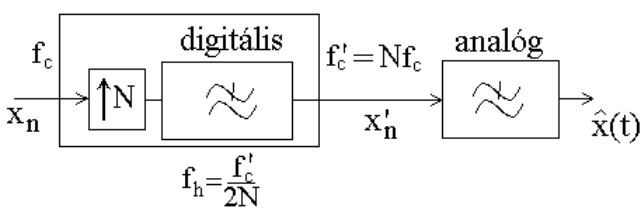
, ahol a szűrőkarakterisztikák

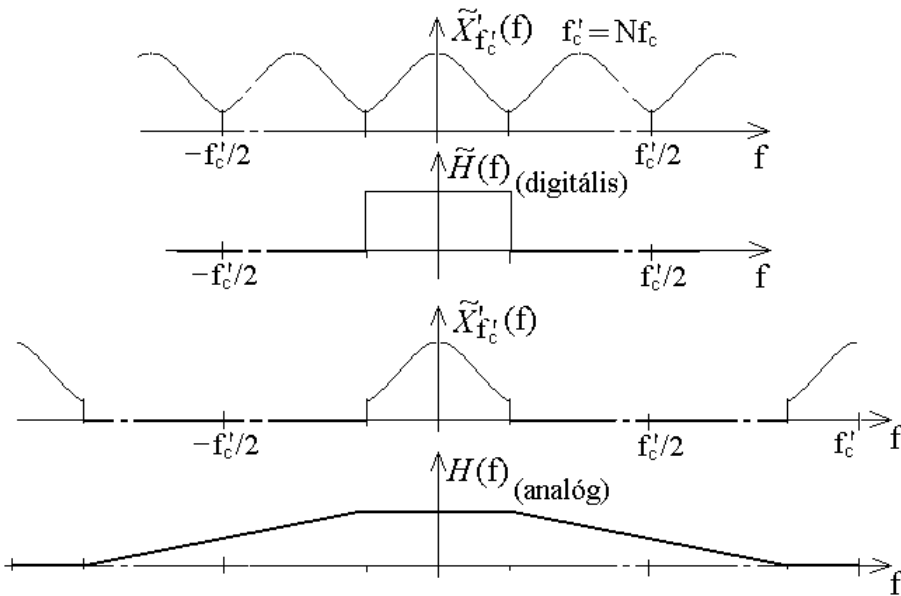


5.5.2 D/A átalakítás túl-mintavételezéssel

Ha az előző pontban előállított x_n sorozatot egy dirac-delta sorozatnak fogjuk fel ($\sum x_n \delta(t-NT)$), akkor ebből egy $f_h = f_c/2$ határ-frekvenciájú ideális aluláteresztő szűrővel állítható vissza az eredeti sávhatárolt folytonos jel. Ez az ún. simítószűrő szintén analóg szűrő. Ahhoz, hogy megvalósítható legyen a simítószűrő, alkalmazni kell a sebességkonverziós technikát:

Először x_n -et N -szeresen interpoláljuk, majd digitálisan szűrjük. Ezután már egy kis amplitúdó-szelektivitású szűrővel végezhetjük a simítást:





Megjegyzés:

Feltételeztük, hogy az analóg simítószűrőre dirac-impulzus sorozat kerül. A valóságban azonban lépcsős folytonos idejű jellel kell számolnunk, azaz mintha egy nulladrendű tartó is lenne a kimeneten. A nulladrendű tartó a jel alapsávi tartományában torzítja az amplitúdó-

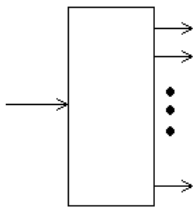
karakterisztikát $\frac{\sin x}{x}$ típusú függvény szerint. Ezt a torzítást az analóg kimeneti simítószűrővel kompenzálni lehet.

5.6 Szűrőbankok

Kétféle szűrőbankról beszélünk:

Egy-bemenetű és több-kimenetű

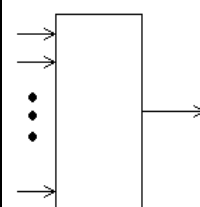
(*analízis szűrőbank*)



Egy nagy sáv szélességű, nagysebességű jeltől több keskenysávú, kisebb sebességű jelet állít elő.

Több-bemenetű és egy-kimenetű

(*szintézis szűrőbank*)



Több kisebb sebességű jelet összefog egy nagysebességű jellé.

Kétféle szűrőbankról fogunk szót ejteni:

- DFT, FFT analízis szűrőbank és
- QMF szintézis szűrőbank.

5.6.1 DFT szűrőbank

A DFT az első fejezet alapján az \bar{x} időtartománybeli mintákat tartalmazó vektort a frekvenciatartománybeli mintákat tartalmazó \bar{y} vektorra transzformálja:

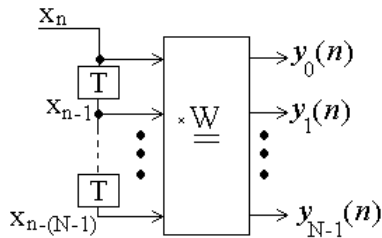
$$\bar{y} = \underline{\underline{W}} \cdot \bar{x}, \text{ ahol } \underline{\underline{W}} \text{ a DFT együttható mátrixa, amelynek elemei } \underline{\underline{W}} : w_{ik} = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}} \right)^{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

(N-ed rendű egységgyökök) és

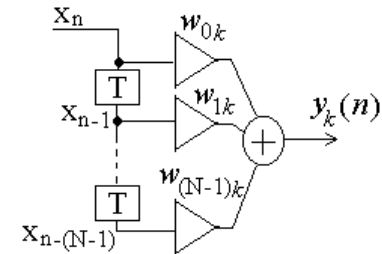
$$\bar{x} = [x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_{N-1}]^T, \quad \bar{y} = [y_0 \quad y_1 \quad \dots \quad y_{N-1}].$$

Mintasebességgel működő DFT

Az x_n diszkrét idejű jelből egy N-1 elemű tárolósor (N mélységű buffer) segítségével készíthetjük el a DFT-hez szükséges \bar{x} jelvektort. Ekkor azonban minden órajelütemben változni fog \bar{x} tartalma. Ha minden egyes ütemben elvégezzük a DFT mátrixszal való szorzást, akkor a kimeneten N db. órafrekvenciájú sorozatot kapunk a kimeneten ($\bar{y}(n)$):



A bemenet és a k-adik kimenet közti rész egy rendszerként értelmezhető, amely szorzókból, összeadókból és késleltetőkből álló hálózattal modellezhető (\rightarrow ARMA rendszer):



\Rightarrow A DFT egy FIR szűrőbank lesz.

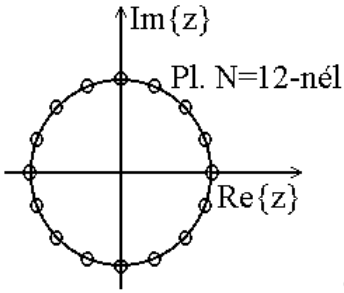
Most vizsgáljuk meg mik lesznek a kimenetek és a bemenet közötti FIR szűrők átviteli $H_k(z)$ karakterisztikái. A vizsgálatot kezdjük a $H_0(z)$ meghatározásával:

Mivel a DFT ($\underline{\underline{W}}$) mátrix első sorában minden elem egyes,

$$H_0(z) = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-(N-1)} \rightarrow z^{-1}H_0(z) = z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N} . \text{ Kivonva egymásból a két egyenletet,}$$

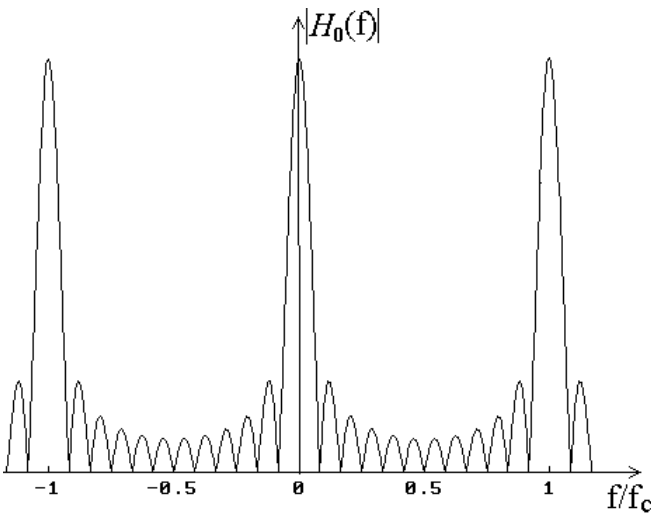
$$(1-z^{-1})H_0(z) = 1-z^{-N} \Rightarrow H_0(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} .$$

Látható, hogy H_0 -nak $z = 1$ -ben pólusa és zérusa is van, amik kiejtik egymást; a $z = 1$ kivételével az N-edrendű egységgyökök lesznek H_0 zérusai:



és a 5.2.2 alapján

$$H(f) = H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi Tf}} = e^{-j2\pi \frac{(N-1)}{2} Tf} \cdot \frac{\sin \pi NTf}{\sin \pi Tf} \rightarrow |H(f)| = \left| \frac{\sin \pi NTf}{\sin \pi Tf} \right|$$



A többi átviteli függvény meghatározásához figyeljük meg a W DFT mátrix szerkezetét;

$$\underline{\underline{W}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}} \right)^{1 \cdot 1} & \dots & \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}} \right)^{1 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M & M & \dots & M \\ 1 & \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}} \right)^{(N-1) \cdot 1} & \dots & \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}} \right)^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{bmatrix}$$

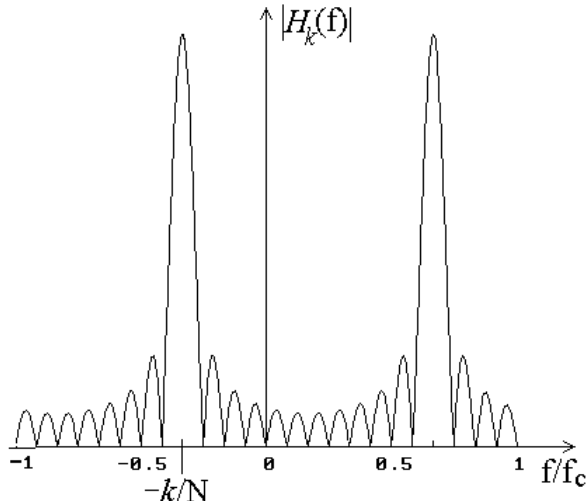
Ebből látható, hogy a k -adik sor elemei, amely nem más mint $H_k(z)$ impulzusválasz sorozata,

$h_{k,n} = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right)^n$ lesz. Ez ekvivalens azzal, mintha $H_0(z)$ impulzusválaszát megszoroztuk volna egy

exponenciális sorozattal: $h_{k,n} = h_{0,n} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = h_{0,n} \cdot e^{-j2\pi n \frac{k \cdot f_c}{N}} T$ A Fourier transzformációk moduláció, eltolás nevű tulajdonsága alapján kapjuk, hogy

$$H_k(f) = H_0(f + f_c(k/N)),$$

azaz a k -adik kimenetre a nulladik kimeneti aluláteresztő szűrő eltoljaként egy sáváteresztő jellegű szűrőt kapunk, tehát a a DFT szűrőbank egy speciális sávszűrő bank.



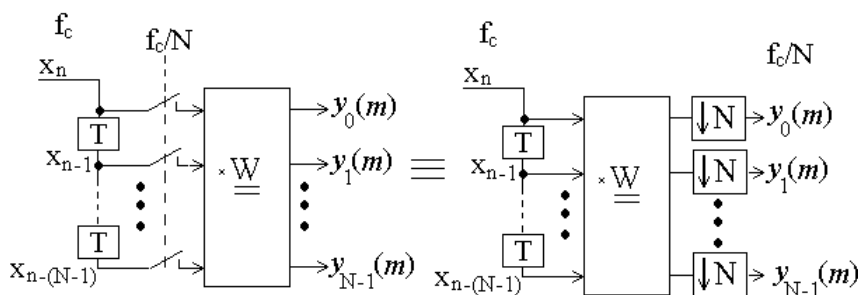
Megjegyzések:

A DFT aritmetikai igénye (az, hogy hány szorzást ill. összeadást kell elvégezni egy órajelciklusban) nagy. A \underline{W} mátrixszal való szorzás N^2 számú komplex szorzást jelent.. Ez azt jelenti, hogy egy 1024 pontos szűrőbank $f_c = 10\text{kHz}$ -es mintavételi frekvencia esetén másodpercenként $\approx 10^7$ számú komplex szorzást kellene elvégezni.

Azonban a \underline{W} tulajdonságai alapján (sok azonos elem szerepel benne) megadható a DFT-nek egy sokkal hatékonyabb kiszámítási módja. Ez az FFT (Fast Fourier Transformation). Az FFT egy órajel ciklus alatt csak $N \cdot \log_2 N$ komplex szorzást végez. Ez az előbbi példánál ≈ 100 -szoros(!) sebességnövekedést jelent.

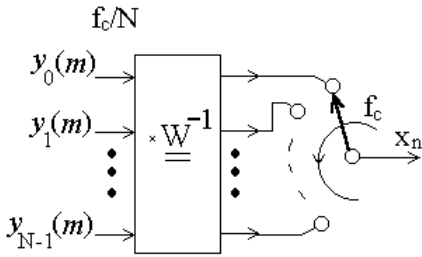
Blokksebességgel működő DFT

Tipikus esetekben a DFT algoritmust csak minden N -edik ütemben végzik el, amikor a buffer teljesen feltöltődött új elemekkel. Vagyis a buffer mindig összegyűjt N mintát, és csak ezután számítjuk ki a kimeneteket. \rightarrow A kimenetek sebessége N -edrésze a bemenetek sebességének. Ahhoz, hogy az így kapott kimenetek és a bemenet közötti összefüggést meghatározzuk, vegyük észre, hogy a blokksebességgel működő DFT ekvivalens azzal, mintha egy mintasebességgel üzemelő DFT kimenetein N -szeres mintaritkítót alkalmaznánk:

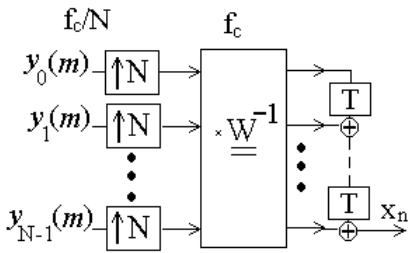


\Rightarrow A kimeneti spektrumban nagy átlapolódások lesznek. Minden a $\left[-\frac{f_c}{2N}, \frac{f_c}{2N}\right]$ frekvenciasávba

keverődik le. Kérdés, hogy ezekből az átlapolódott f_c/N sebességű sorozatokból rekonstruálható-e az eredeti szélessávú idősor. Ez az alábbi kommutátoros kapcsolós megoldással meg is tehető:



Ez a következő kapcsolással is modellezhető:



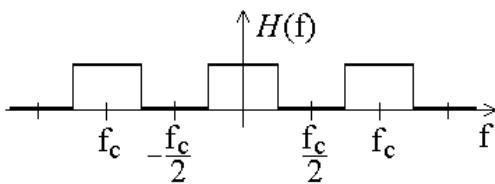
Megjegyzés:

A blokksebességgel működő DFT és IDFT között az y_k jelek sorrendjét összekeverjük, akkor az IDFT kimenetén nem az eredeti jelet, hanem egy olyan jelet kapunk, amelynek frekvenciaösszetevői össze vannak keverve, de információtartalma mégis változatlan. Ezzel a módszerrel egyszerű titkosító készíthető.

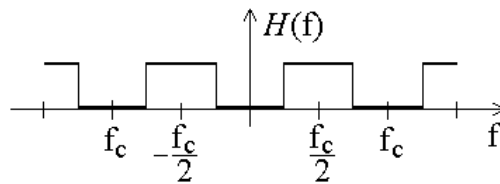
5.6.2 QMF szűrőbank

Az L -szintű QMF (quadrature mirror filter) 2^L részre osztja a bemeneti frekvenciasávot. Olyan kaszkád fa struktúra, amelynek ágaiban egy alul- v. felül-áteresztő szűrő és egy kétszeres mintaritkító áll. A faágaknál a jelet olyan ideális alul- és felül-áteresztő szűrő bontja ketté, amelynek határfrekvenciája $f_h = f_c/4$. Az ilyen szűrőket oktávsszűrőknek nevezzük.

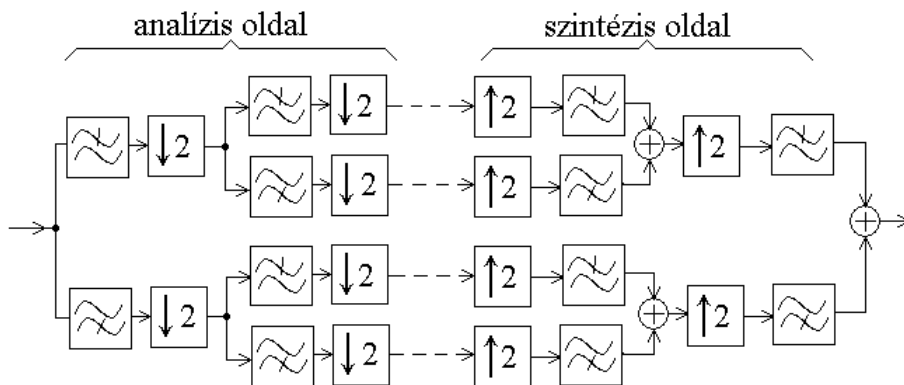
Az aluláteresztő oktávsszűrő frekvenciaátvitele:



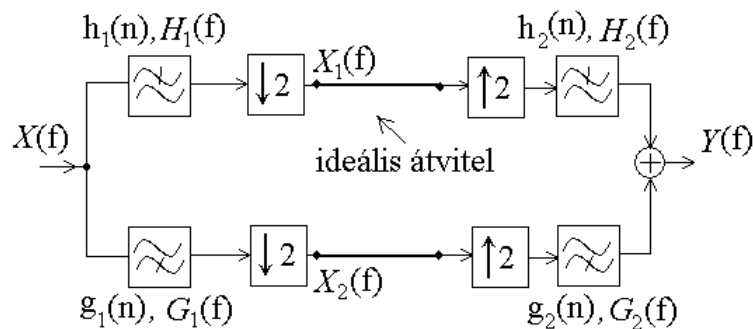
A felül-áteresztő oktávsszűrő átville:



A QMF átalakító és visszaalakító blokkdiagramja (L = 2):



Belátható, hogy nem csak ideális oktávszűrőkkel lehet megvalósítani az átlapolódás mentes részsávokra bontást ill. visszaalakítást. Ennek feltételét most az L = 1 szintű QMF-nél fogjuk megvizsgálni, amely értelemszerűen kiterjeszhető tetszőleges L-re.



Vizsgáljuk meg az $Y(f)$ kimeneti spektrumot általános esetben, amikor az analízis oldalon a nem ideális aluláteresztő oktávszűrő impulzusválasz sorozata $h_1(n)$, frekvencia-átviteli függvénye $H_1(f)$, valamint a felül-áteresztő oktávszűrő impulzusválasz sorozata $g_1(n)$, frekvencia-átviteli függvénye $G_1(f)$, ill. szintézis oldalon rendre $h_2(n)$, $H_2(f)$, $g_2(n)$, $G_2(f)$.

A kétszeres mintaritkítás a következő hatással van a spektrumra:

$$X_1(f) = \frac{1}{2} \left(X(f) \cdot H_1(f) + X\left(f - \frac{f_c}{2}\right) \cdot H_1\left(f - \frac{f_c}{2}\right) \right)$$

$$X_2(f) = \frac{1}{2} \left(X(f) \cdot G_1(f) + X\left(f - \frac{f_c}{2}\right) \cdot G_2\left(f - \frac{f_c}{2}\right) \right).$$

Mivel a null-mintával való sűrítés (szintézis oldalon) a spektrumot nem változtatja meg és ideális csatornaátvitelt tételeztünk fel, a kimeneti spektrum:

$$Y(f) = \frac{1}{2} (H_2(f) \cdot X_1(f) + G_2(f) \cdot X_2(f)). \rightarrow$$

$$Y(f) = \frac{1}{2} X(f) \cdot [H_2(f) \cdot H_1(f) + G_2(f) \cdot G_1(f)] + \frac{1}{2} X\left(f - \frac{f_c}{2}\right) \cdot \left[H_1(f) \cdot H_2\left(f - \frac{f_c}{2}\right) + G_2(f) \cdot G_1\left(f - \frac{f_c}{2}\right) \right]$$

Ahhoz, hogy a kimeneti spektrum (egy 1/2-es szorzótól eltekintve) megegyezzen a bemeneti spektrummal, a következő két feltételt kell kielégíteni a szűrőknek:

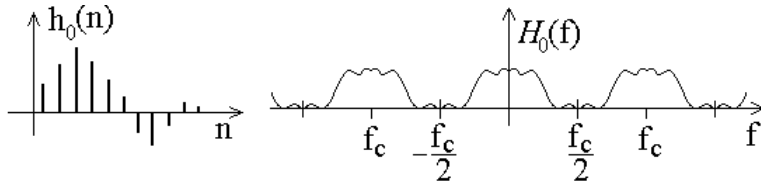
$$(1) H_1(f) \cdot H_2\left(f - \frac{f_c}{2}\right) + G_2(f) \cdot G_1\left(f - \frac{f_c}{2}\right) = 0$$

Ez az elsődleges feltétel, mert ekkor nem lesz átlapolódás.

$$(2) H_2(f) \cdot H_1(f) + G_2(f) \cdot G_1(f) = 1$$

Ez a lineáris torzításmentesség feltétele. Ha nem teljesül, akkor sincs nagy baj, mert utólag korrigálható, ellenben a jelátlapolódás nem.

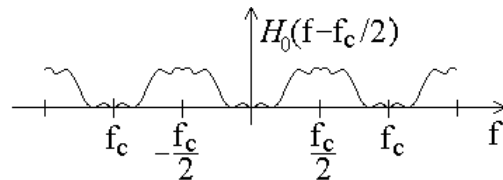
A szűrők meghatározását kezdjük azzal a feltevéssel, hogy adott egy prototípus aluláteresztő oktávszűrő, amely nem ideális, de realizálható. Ez pl. rendelkezzen az alábbi impulzusválasz sorozattal és frekvencia-átviteli függvényvel:



Legyen az analízis és szintézis oldali aluláteresztő ilyen:

$$\begin{cases} h_1(n) = h_0(n), & H_1(f) = H_0(f) \text{ és} \\ h_2(n) = h_0(n), & H_2(f) = H_0(f). \end{cases}$$

Ha egy oktáv aluláteresztő szűrő frekvencia-átviteli függvényét eltoljuk $f_c/2$ -vel, akkor egy oktáv felüláteresztőt kapunk:



Éppen ezért képezzük az analízis oldali felül-áteresztőt $H_0(f)$ eltoltjaként:

$$\begin{cases} G_1(f) = H_0(f - f_c/2) \rightarrow \\ g_1(n) = h_0(n) \cdot e^{j2\pi \frac{f_c}{2} nT} = h_0(n) \cdot (e^{j\pi})^n = (-1)^n \cdot h_0(n) \end{cases}$$

A szintézis oldali felül-áteresztő legyen olyan, hogy teljesüljön az (1) feltétel (az

átlapolódásmentesség):

$$G_2(f) \cdot H_1(f) \cdot H_2\left(f - \frac{f_c}{2}\right) + G_2(f) \cdot G_1\left(f - \frac{f_c}{2}\right) = 0 \rightarrow$$

$$H_0(f) \cdot H_0\left(f - \frac{f_c}{2}\right) + G_2(f) \cdot H_0(f) = 0, \text{ mert}$$

$$G_1\left(f - \frac{f_c}{2}\right) = H_1\left(f - \frac{f_c}{2} - \frac{f_c}{2}\right) = H_0(f - f_c) = H_0(f). \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} G_2(f) = -H_0\left(f - \frac{f_c}{2}\right) = -G_1(f) \rightarrow \\ g_2(n) = -(-1)^n \cdot h_0(n). \end{array} \right.$$

Látható, hogy az átlapolódás mentesség tetszőleges $H_0(f)$ oktáv prototípus szűrővel megvalósítható.

Ahhoz, hogy lineáris torzítás se legyen $H_0(f)$ -et úgy kell megválasztani, hogy a (2) feltétel is teljesüljön, azaz

$$H_2(f) \cdot H_1(f) + G_2(f) \cdot G_1(f) = 1 \rightarrow$$

$$H_0^2(f) - H_0^2\left(f - \frac{f_c}{2}\right) = 1$$