4. Diszkrét idejű véletlen jelek, sztochasztikus folyamatok

Definíció az időtartományban:

Diszkrét értékű véletlen jel, azaz diszkrét sztochasztikus folyamat alatt a ξ_n , n = $-\infty \dots +\infty$, valós **valószínűségi változó sorozat**ot értjük. A ξ_n valószínűségi változók T időközökként követik egymást, a jel (a folyamat) órájának frekvenciája F= 1/T.

A továbbiakban a (diszkrét)
- véletlen jel,
- sztochasztikus folyamat,
- folyamat,
- véletlen forrás,
- forrás

kifejezéseket szinonimaként fogjuk használni, mindig valószínűségi változó sorozatot értünk rajta.

Míg egy diszkrét idejű x_n jel időbeni leírása magának a számsorozatnak a megadásával történik, addig a ξ_n folyamat leírása (fogalmilag és gyakorlatilag is) sokkal bonyolultabb feladat. A továbbiakban a folyamatok leírásának elvi módszereivel, nevezetes tulajdonságú osztályaival és transzformációival foglalkozunk.

4.1 A diszkrét idejű sztochasztikus folyamatok leírása

Az összes lehetséges folyamat közül egy konkrét valószínűségi változó sorozat megadása (minden lehetséges különböző másiktól való elhatárolása), valamely matematikai objektum egyértelmű megadásával történhet. Három lehetséges elvi módszert veszünk listába:

- Mindenféle dimenziós **eloszlás sokaság** megadása
- Mindenféle dimenziós **sűrűség sokaság** megadása
- Mindenféle dimenziós és rendű **momentum sokaság** megadása

Folyamatok leírásának fenti módjai (elvileg) egymásba kölcsönösen átszámíthatóak, adott esetben az adott reprezentációt (leírási módot) érdemes használni, más meggondolásokhoz, más leírásokra érdemes áttérni. Lássuk a konkrét definiciókat!

4.1.1 Eloszlás sokaság

Definíció:

A ξ_n véletlen jelnek (valószínűségi változó sorozatnak) az N darab n_1, n_2, ... n_N indexű időpontokra illeszkedő N-dimenziós $F_{\xi\ n_1,n_2,\dots n_N}(x_1, x_2,\dots x_N)$ eloszlás függvénye az N darab $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \dots \xi_{n_N}$ valószínűségi változók együttes eloszlás függvénye, azaz

$$F_{\xi\ n_1,n_2,\dots n_N}(x_1, x_2,\dots x_N) = \Pr(\xi_{n_1} \le x_1, \xi_{n_2} \le x_2, \dots \xi_{n_N} \le x_N),$$

ahol Pr(esemény) az esemény valószínűsége.

Minden folyamatnak létezik eloszlás sokasága.

Egy folyamat akkor adott egyértelműen, ha az összes dimenziójú és mindenféle illeszkedésű eloszlását megadjuk vagy a már adottakból ellentmondás mentesen meghatározhatóak. Minden N-dimenziójú eloszlásfüggvény tartalmazza a lefedett időpontok részhalmazához tartozó kisebb dimenziójú eloszlásfüggvényeket (a nem szereplő változók helyébe ∞-t helyettesítve), ebben az értelemben kompatibilisnek kell lennie a különböző dimenziójú és lefedő eloszlásfüggvények rendszerének. A folyamat teljes leírása tehát, egy sokszorosan végtelenül indexelt, sokváltozós függvénysokaság. A sokaság bármely nagyobb dimenziójú és/vagy újabb időpontokra illeszkedő függvényének bármely értéke (az általános esetben) a folyamatra vonatkozó új, a többitől független információt hordozhat.

Egy folyamatot leíró eloszlás sokaságot, a sűrűség sokaságból integrálással kaphatjuk meg.

Egy folyamatot leíró eloszlás sokaságot, a momentum sokaságból a megfelelő konvergencia tulajdonságú függvénysorozattal, sorfejtésekkel kaphatjuk meg.

Nevezetes az egydimenziós u.n. amplitúdó eloszlás:

$$F_{\xi,n}(x) = \Pr(\xi_n \le x),$$

mely általában időfüggő $F_{\xi,n}(x) = F_\xi(n,x)$,

de bizonyos esetekben (lásd stacionaritás) lehet idő független: $F_{\xi,n}(x) = F_\xi(x)$

4.1.2 Sűrűség sokaság

A folyamat sűrűség sokaságát az eloszlások alapján deriválással definiálhatjuk:

A ξ_n véletlen jelnek (valószínűségi változó sorozatnak) az N darab n_1, n_2, ... n_N indexű időpontokra illeszkedő N-dimenziós $f_{\xi\ n_1,n_2,\dots n_N}(x_1, x_2, \dots x_N)$ sűrűség függvénye az N darab $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \dots \xi_{n_N}$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye, azaz

$$f_{\xi\ n_1,n_2,\dots n_N}(x_1, x_2, \dots x_N) = \frac{\partial^N F_{\xi_{n_1,n_2,\dots n_N}}(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial x_1 \cdot \partial x_1 \cdot \dots \cdot \partial x_N}.$$

Minden N-dimenziójú sűrűség minden változójában egy egydimenziós valószínűség sűrűség, melyre igazak a valószínűség-számítás elemi tényei (a -∞ ... +∞ felett nem negatív, egységnyi görbealatti területtel).

A sűrűségek annyiban, és olyan formában léteznek, amennyiben és ahogyan értelmezve a deriváltak léteznek.. (Például az eloszlás ugrásánál a derivált elemi úton nem értelmezett, de adott esetben célszerű lehet a Dirac-delta függvények használata)

Egy folyamatot leíró sűrűség sokaságot, a momentum sokaságból a megfelelő konvergencia tulajdonságú függvénysorozattal, sorfejtésekkel kaphatjuk meg.

4.1.3 Momentum sokaság

Definíció:

A ξ_n véletlen jelnek (valószínűségi változó sorozatnak) az N darab n_1, n_2, ... n_N indexű időpontokra illeszkedő **N-dimenzió**s, $m_1+m_2+...+m_N =$ **M –ed rendű** $M_{\xi_{n_1,n_2,...,n_N}}^{m_1+m_2+...+m_N=M}$ **momentum**a az N darab $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, ... \xi_{n_N}$ valószínűségi változók m_1 m_2 ... m_N hatványai szorzatának a **várható érték**e:

$$M_{\xi_{n_1,n_2,...,n_N}}^{m_1+m_2+...+m_N=M} = E\left\{\xi_{n_1}^{m_1} \cdot \xi_{n_2}^{m_2} \cdot ... \cdot \xi_{n_N}^{m_N}\right\},$$

mely egy N-dimenziós számsorozat.

A **várhatóérték** egy valószínűségi változó lehetséges értékeinek a valószínűségeivel súlyozott átlaga, mely az $F_\eta(x)$ eloszlásból Stieltjes integrállal, az $f_\eta(x)$ sűrűségből Rieman integrállal számítható:

$$E\{\eta\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \; dF_\eta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \; f_\eta(x) dx .$$

Az ξ valószínűségi változó g(x) függvény szerinti várhatóértéke a $g(\xi)$ val. vált. várható értéke:

$$E\{g(\xi(\} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_\xi(x) .$$

A valószínűségi változók skalár értékű függvényének várhatóértéke a valószínűségi változók együttes (több dimenziós) eloszlásából az alábbi Stieltjes integrállal számolható:

$$E\left\{\xi_{n_1}^{m_1} \cdot \xi_{n_2}^{m_2} \cdot ... \cdot \xi_{n_N}^{m_N}\right\} = \int x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot ... \cdot x_N^{m_N} \;\; dF_{\xi\; n_1,n_2,...n_N}(x_1, x_2, ..., x_N)$$

A momentumok a sűrűségekből az alábbi többszörös Rieman integrállal számítható:

$$E\left\{\xi_{n_1}^{m_1} \cdot \xi_{n_2}^{m_2} \cdot ... \cdot \xi_{n_N}^{m_N}\right\} = \iint ... \int x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot ... \cdot x_N^{m_N} \;\; f_{\xi\; n_1,n_2,...n_N}(x_1, x_2, ..., x_N) \;\; dx_1 dx_2 ... dx_N$$

A folyamat **centrális momentum** sokasága, az egyes időpontokban vett valószínűségi változók várhatóértékeitől való eltérései hatványainak szorzatának várható értéke:

$$C_{\xi_{n_1,n_2,...,n_N}}^{m_1+m_2+...+m_N=M} = E\left\{\left(\xi_{n_1} - E\left\{\xi_{n_1}\right\}\right)^{m_1} \cdot \left(\xi_{n_2} - E\left\{\xi_{n_2}\right\}\right)^{m_2} \cdot ... \cdot \left(\xi_{n_N} - E\left\{\xi_{n_N}\right\}\right)^{m_N}\right\}.$$

A momentumok és a centrális momentumok kölcsönösen átszámíthatóak egymásba.

A momentumok teljes sokasága, azaz mindenféle dimenziójú, illeszkedésű és rendű momentumok sokszorosan végtelen sokaságának ismerete leírja a folyamatot.

4.1.4 Nevezetes első- és másodrendű, egy- és kétdimenziós folyamatjellemzők

- Egydimenziós $F_{\xi n}$ (x) eloszlás és $f_{\xi n}$ (x) sűrűség függvény.
  Ezek az egy változós, (de általában időfüggő) függvények a ξ_n folyamat **amplitúdó eloszlás**-, illetve **amplitúdó sűrűség** függvényei.

- Egydimenziós elsőrendű momentum: $\mathsf{E}\{\xi_n\}= m_\xi(n)$
  Ez egy egydimenziós számsorozat, mely a ξ_n folyamat (általában időfüggő) **várható érték** sorozata.

- Egydimenziós másodrendű momentum: $\mathsf{E}\{\xi_n^2\}= P_\xi(n)$.
  Ez az egydimenziós számsorozat a ξ_n folyamat **négyzetes várható érték** sorozata vagy más néven **pillanatnyi** (valószínűségek szerint átlagolt) **teljesítmény** sorozata.

- Egydimenziós másodrendű centrális momentum: $\mathrm{E}\left\{\left(\xi_n - \mathrm{E}\{\xi_n\}\right)^2\right\}= \mathrm{C}^2_{\xi\, n} = \sigma^2_\xi(n)$
  Ez a számsorozat a ξ_n folyamat **szórásnégyzet** sorozata vagy más néven **variancia** sorozata. Ennek a sorozatnak a négyzetgyök-sorozata a **szórás** sorozat, más néven a **standard eltérés** sorozat, $\sigma_\xi(n)$.

A várható érték, a variancia és a teljesítmény összefüggése:

$$C_n^2 = \mathsf{E}\left\{\left(\xi_n - \mathsf{E}\{\xi_n\}\right)^2\right\} = \mathsf{E}\left\{\xi_n^2\right\} - 2\mathsf{E}\{\xi_n\}\mathsf{E}\{\xi_n\} + \left(\mathsf{E}\{\xi_n\}\right)^2 = \mathsf{E}\left\{\xi_n^2\right\} - \left(\mathsf{E}\{\xi_n\}\right)^2$$

azaz

$$P_\xi(n) = \sigma_\xi^2(n) + m_\xi^2(n)$$

Megjegyzések:

– Az egydimenziós, centrális másodrendű momentum, a szórásnégyzet azt mondja meg, hogy mekkora mértékben fognak eltérni átlagosan a valószínűségi változó értékei az átlagos értéktől az n-edik idő pillanatban. Vagyis az amplitúdó sűrűség függvény szélességére utal.

– A harmad- és negyedrendű momentumok az amplitúdó sűrűségfüggvény ferdeségére és laposságára utalnak.

- Kétdimenziós, másodrendű (abszolút) momentum: $\mathrm{M}^{1+1=2}_{\xi_{n_1,n_2}} = \mathrm{E}\left\{\xi_{n_1}\cdot\xi_{n_2}\right\}= r_\xi(n_1, n_2)$
  Ez a kétdimenziós számsorozat a ξ_n folyamat **(autó)korrelációs** sorozata.

- Kétdimenziós, másodrendű centrális momentum:
  $$C^{1+1=2}_{\xi_{n_1,n_2}} = \mathsf{E}\left\{\left(\xi_{n_1} - m_\xi(n_1)\right)\cdot\left(\xi_{n_2} - m_\xi(n_2)\right)\right\} = c_\xi(n_1, n_2)$$
  Ez a kétdimenziós számsorozat a ξ_n folyamat **kovariancia** sorozata. Ebből származik a

normalizált korrelációs együtthatok sorozata:

$$k_\xi(n_1,n_2)=\frac{c_\xi(n_1,n_2)}{\sigma_\xi(n_1)\sigma_\xi(n_2)}$$, melyre igaz, hogy $-1 \le k_\xi(n_1,n_2) \le 1.$

Az összefüggés a korrelációsorozat és a kovariancia sorozat között:

$$c_\xi(n_1, n_2) = r_\xi(n_1, n_2) - m_\xi(n_1)\cdot m_\xi(n_2)$$

Az N darab $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \ldots \xi_{n_N}$ valószínűségi változókat a $\underline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_{n1} \\ \ldots \\ \xi_{nN} \end{bmatrix}$ oszlopvektorba összefoglalva, valószínűségi vektorváltozót kapunk, melyre a várhatóérték képzés az N-elemű

$\underline{m}_\xi = E\{\underline{\xi}\} = \begin{bmatrix} E\{\xi_{n1}\} \\ \ldots \\ E\{\xi_{nN}\} \end{bmatrix}$ **várhatóérték vektort** eredményezi.

A $\underline{\xi}$ vektor valószínűségi változóra az NxN méretű **korreláció mátrixot** az alábbiak szerint kapjuk: $\underline{\underline{R}}_\xi = E\{\underline{\xi}\,\underline{\xi}^T\} = \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & E\{\xi_{ni}\xi_{nj}\} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$, mely a megfelelő korrelációs együtthatók mátrixa.

Hasonló módon definiált a $\boldsymbol{\Sigma_\xi}$ **kovariancia mátrix** is, melynek elemei a kiválasztott N darab időpontra illeszkedő folyamatértékek páronkénti kovariancia együtthatói. A kovariancia mátrixot szokás szórás(négyzet) mátrixnak is nevezni.

A gyakorlatban a korreláció és kovariancia mátrixokat csak az N darab, egymást követő n, n+1, n+2, ... n+(N-1) időpontokra illeszkedve használják, ez lesz az mátrixok alapértelmezése:

$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi}\,\mathbf{n,N}}(i,j) = r_\xi(n+i\,,\ n+j)\,,\ i,j = 0,1, \ldots (N-1)$

A korrelációs-, a kovariancia mátrix és a várható érték vektor közötti összefüggés:

$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{m}_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{m}_{\boldsymbol{\xi}}^T$, ahol ^{T} a transzponálás jele.

A korrelációs és a kovariancia mátrixok nyilvánvalóan **szimmetrikus** mátrixok , továbbá belátható, hogy ezenkívül legalább **pozitív szemidefinit** mátrixok.

Ebben a pontban felsorolt momentumok, mint folyamatjellemzők, a véletlen jelet másodrendben írják le.

4.2 Nevezetes véletlen jel osztályok

4.2.1 Gauss folyamat

Definíció:

A ξ_n folyamatot Gauss folyamatnak nevezzük, ha minden véges dimenziós eloszlása normális,

azaz minden $\overline{\xi} = \left[\xi_{n_1} \quad \xi_{n_2} \quad \dots \quad \xi_{n_N}\right]^T$ N elemű vektor valószínűségi változó N változós sűrűségfüggvénye normális:

$$f_\xi\left(n_1, n_2, \dots, n_N, \overline{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \underline{\underline{\Sigma}}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\overline{m}-\overline{x}\right)^T \underline{\underline{\Sigma}}^{-1}\left(\overline{m}-\overline{x}\right)},$$

ahol

$$\overline{m} = \left[\mathsf{E}\left\{\xi_{n_1}\right\} \quad \mathsf{E}\left\{\xi_{n_2}\right\} \quad \dots \quad \mathsf{E}\left\{\xi_{n_N}\right\}\right]^T$$ a várható érték vektor és

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathsf{E}\left\{\left(\overline{\xi} - \overline{m}\right)\cdot\left(\overline{\xi} - \overline{m}\right)^T\right\} = \begin{bmatrix} c_\xi(n_1, n_1) & c_\xi(n_1, n_2) & \dots & c_\xi(n_1, n_N) \\ c_\xi(n_2, n_1) & c_\xi(n_2, n_2) & \dots & c_\xi(n_2, n_N) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_\xi(n_N, n_1) & c_\xi(n_N, n_2) & \dots & c_\xi(n_N, n_N) \end{bmatrix}$$

a kovariancia mátrix.

Megállapítható, hogy a Gauss folyamatot teljesen meghatározzák az első- és másodrendű momentumai, azaz ha adott egy egydimenziós várható érték sorozat és egy kétdimenziós kovariancia sorozat, akkor a Gauss folyamat teljesen meghatározott.

4.2.2 Memóriamentes és korrelálatlan folyamatok

Definíció:

Ha a ξ folyamat minden véges dimenziós $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \dots, \xi_{n_N}$ mintájának elemei **független valószínűségi változók**, akkor ξ **memóriamentes** folyamat.

Memória mentes folyamatot egydimenziós jellemzői teljesen leírnak, ugyanis független valószínűségi változók N-dimenziós eloszlás függvénye mindig előállítható az egyes valószínűségi változók egydimenziós eloszlásainak szorzataként:

$$F_{\xi\, n_1, n_2, \dots n_N}(x_1, x_2, \dots x_N) = \prod_{i=1}^{N} F_{\xi\, n_i}(x_i).$$

Ebből következik, hogy a többdimenziós sűrűségek és momentumok is előállíthatóak az egydimenziós statisztikák szorzataként:

$$f_{\xi_{n_1,n_2,\dots n_N}}(x_1,x_2,\dots x_N)=\prod_{i=1}^{N} f_{\xi_{n_i}}(x_i)$$

$$M_{\xi_{n_1,n_2,\dots,n_N}}^{m_1+m_2+\dots+m_N=M}=\prod_{i=1}^{N} M_{\xi_{n_i}}^{m_i}$$

Tehát memóriamentes véletlen jel esetén az egydimenziós leírás teljes leírását adja a folyamatnak, azaz

- egydimenziós (de időfüggő) amplitúdó eloszlások
- vagy az amplitúdó sűrűségek
- vagy az egydimenziós momentumok kétszeresen végtelen (idő-index és rend-index) számsorozatának

ismerete a folyamat teljes leírását adja.

Definíció:

Ha minden ξ_{n_1}, ξ_{n_2} valószínűségi változók párra a kovariancia együttható zérus, azaz:

$$\mathsf{E}\{(\xi_{n_1}-m_\xi(n_1))\cdot(\xi_{n_2}-m_\xi(n_2))\}=c_\xi(n_1,n_2)=0,$$ minden $n_1 \neq n_2$ időpont-párra,

akkor a folyamatot **korrelálatlannak** nevezzük.

Korrelálatlan folyamat $\underline{\underline{\Sigma}}$ kovariancia mátrixa mindig diagonális mátrix (az átlóban az általában időfüggő szórásnégyzetek vannak).

A korrelálatlanság gyengébb tulajdonság, mint a memória mentesség. Ha egy folyamat memória mentes, akkor korrelálatlan is, de a korrelálatlanságból nem következik a memória mentesség.

Ha egy **Gauss** folyamat **korrelálatlan**, akkor azonban biztos, hogy **memória mentes** is, hiszen - $\underline{\underline{\Sigma}}$ diagonális voltából következően - a többdimenziós sűrűségek (és így az eloszlások is) felírhatóak egyváltozós sűrűségek (eloszlások) szorzataként. Gauss folyamatot teljesen meghatározzák első- és másodrendű momentum sokaságai.

A korrelálatlan folyamatoknál a másodrendű, de nem egydimenziós momentumok előállíthatóak a megfelelő egydimenziós momentumok szorzataként, ezért a korrelálatlanságot pontosabban **másodrendben korrelálatlanság**nak is nevezhetjük.

Ha egy folyamatra igaz, hogy minden M-ed rendű momentum (,mely nem egydimenziós) előállítható a megfelelő egydimenziós momentumok szorzataként, akkor a folyamatot **M-rendben korrelálatlan**nak nevezzük.

(másodrendben) korrelálatlan folyamatok

M-rendben korrelálatlan folyamatok

memória mentes folyamatok

korrelálatlan Gauss folyamatok

A fenti ábrában a korrelálatlanság, a memóriamentesség, és a gauss-ság tulajdonságok által generált folyamat-halmazok viszonyát rajzoltuk le.

4.2.3 Stacioner (invariáns) folyamatok

Definíció:

Ha ξ_n bármely N dimenziójú és $(n_1, n_2, ...n_N)$ illeszkedésű F_ξ eloszlása invariáns bármely n_o értékű időbeli eltolásra, (azaz idő független),

$$F_{\xi\, n_1,n_2,...,n_N}(x_1, x_2,..., x_N) = F_{\xi\, n_1-n_0,n_2-n_0,...,n_N-n_0}(x_1, x_2,..., x_N) \ ,$$

akkor a ξ_n folyamatot **stacioner**nek nevezzük.

A fenti definició közvetlen következményei érvényesek a sűrűség sokaságra és a momentum sokaságra is:

$$f_{\xi\, n_1,n_2,...,n_N}(x_1, x_2,..., x_N) = f_{\xi\, n_1-n_0,n_2-n_0,...,n_N-n_0}(x_1, x_2,..., x_N) \ ,$$

$$M_{\xi\, n_1,n_2,...,n_N}^{m_1+m_2+...+m_N=M} = M_{\xi\, n_1-n_o,n_2-n_o,...,n_N-n_o}^{m_1+m_2+...+m_N=M}$$

Diszkrét idejű folyamatok alábbi jelzőit
- stacioner,
- stacionárius,
- invariáns,
- idő (eltolás) invariáns

a továbbiakban szinonimaként fogjuk használni.

A stacionaritás általános definíciójának következményei:

Az egy dimenziós, eredetileg időfüggő jellemzők idő függetlenné válnak:

- amplitúdó eloszlás: $F_{\xi\, n}(x) = F_{\xi\, 0}(x) = F_\xi(x)$
- amplitúdó sűrűség: $f_{\xi\, n}(x) = f_{\xi\, 0}(x) = f_\xi(x)$
- várható érték: $m_\xi(n) = m_\xi(0) = m_\xi$
- átlag teljesítmény: $P_\xi(n) = P_\xi(0) = P_\xi$
- szórásnégyzet (variancia): $\sigma_\xi^2(n) = \sigma_\xi^2(0) = \sigma_\xi^2$

A kétdimenziós momentumok eredetileg két dimenziós sorozatai egydimenziós sorozattal leírhatókká válnak:

- korreláció: $M_{\xi_{n_1,n_1+\Delta n}}^{1+1=2} = r_\xi(n_1, n_1+\Delta n) = r_\xi(\Delta n)$
- kovariancia: $C_{\xi_{n_1,n_1+\Delta n}}^{1+1=2} = c_\xi(n_1, n_1+\Delta n) = c_\xi(\Delta n)$

  általában: a kétdimenziós jellemzők már nem a két időpont kétváltozós függvényei, hanem csak a két időpont távolságától egydimenziósan függnek.

Általában megállapítható, hogy a stacionaritás az N-dimenziós jellemzőknek (N-1) dimenziós leírhatóságát teszik lehetővé.

Stacioner folyamat korrelációs és kovariancia sorozataira igazak az alábbi tulajdonságok:

- összefüggés: $r_\xi(n) = c_\xi(n) + m_\xi^{\,2}$
- valós, páros sorozatok: $r_\xi(n) = r_\xi(-n)$, $c_\xi(n) = c_\xi(-n)$
- $|r_\xi(n)| \le r_\xi(0) = P_\xi$, $|c_\xi(n)| \le c_\xi(0) = \sigma_\xi^2$

Stacioner folyamatok fontos jellemzője a **spektrális teljesítmény sűrűségfüggvény**, mely az egydimenziós kovariancia (vagy korreláció) sorozat Z-transzformáltja:

$$\mathbf{S}_\xi(z) = Z\{c_\xi(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_\xi(n)\cdot z^{-n}$$

illetve Fourier transzformáltja:

$$S_\xi(f) = F\{c_\xi(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_\xi(n) e^{-j2\pi 2\pi fT}$$

A teljesítménysűrűség fontos tulajdonságai:

- $\mathbf{S}_\xi(z) = \mathbf{S}_\xi(z^{-1})$, azaz “szimmetrikus” az egységkörre.
- $\mathrm{Im}(S_\xi(f)) = 0$, $S_\xi(-f) = S_\xi(f)$, valós, páros függvény.
- $S_\xi(f) \ge 0$, nem negatív.
- A kovariancia és a korreláció sorozatok a konstans várhatóérték-négyzet sorozatban különböznek, tehát Fourier transzformáltjaik az órajel szerint periodikus Dirac-deltában különböznek. Ez azt jelenti, hogy nem nulla várhatóérték estén a frekvencia tengely felett értelmezett teljesítmény spektrumban nulla frekvenciánál (és az órajel szerint eltoltjainál) nulla sávszélesség felett nem nulla “egyenáramú” teljesítmény jelenik meg.
- Ha a teljesítmény spektrumban f_o frekvenciánál (pontosabban $\pm f_o + k F$, $k=-\infty \ldots \infty$ frekvenciáknál) jelenik meg Dirac-delta (vonalas komponens), akkor ez azt jelenti, hogy a stacioner folyamatban van f_o frekvenciájú periodikus összetevő (lásd. következő pont).

Az a követelmény, hogy egy folyamat minden rendű és rangú statisztikus jellemzője eltolás invariáns (stacionaritás) legyen, nagyon szigorú megkötés.

Enyhébb megkötéseknek eleget tevő stacioner osztályok definíciói az alábbiak:

Definíció:

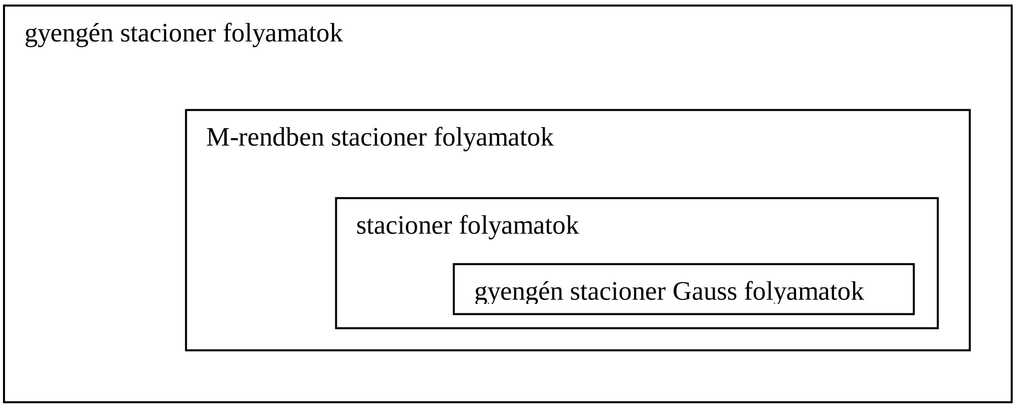
> Ha egy sztochasztikus folyamat minden kétdimenziós statisztikus jellemzője eltolás invariáns, akkor **másodrendű stacionaritás**ról beszélünk.
>
> Ha a várható érték állandó és a másodrendű momentumok eltolás invariánsak, az autókorreláció-sorozat egydimenziós, akkor a folyamatot **gyengén stacionárius**nak nevezzük.

A gyengén stacioner folyamatok tehát

- állandó várhatóértékkel, szórással, teljesítménnyel,
- egydimenziós korreláció, kovariancia sorozattal és
- $\mathbf{S}_\xi(z)$, komplex sík felett értelmezett, illetve $S_\xi(f)$ valós frekvencia tengely felett értelmezett teljesítménysűrűség spektrummal jellemezhető.

Ha egy gyengén stacioner folyamat Gauss folyamat is, akkor stacioner is, mert az első és másodrendű momentumok stacionaritásából következik az általuk meghatározott teljes eloszlás sokaság stacionaritása is.

Az ebben a pontban definiált folyamatok halmazainak viszonyait az alábbi Venn diagrammal szemléltetjük.



4.2.4 Véletlen fázisú szinusz

Vegyük a következő jelet:

$$\xi_n = \sin(2\pi f_o nT + \varsigma), \quad n= -\infty ... \infty,$$

ahol ς a $[0, 2\pi]$ intervallum felett egyenletes eloszlású valószínűségi változó és $f_o < F/2 = 1/2T$. Ezt a jelet véletlen kezdőfázisú szinusznak nevezzük.

Valószínűségi változó függvénye is valószínűségi változó tehát ξ_n valószínűségi változó sorozat, azaz véletlen jel.

Számítsuk ki a várható értékét:

$$m_\xi(n) = E\{\xi_n\} = E\{\sin(2\pi f_o nT + \varsigma)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi f_o nT + x)\, f_\varsigma(x) dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2\pi f_o nT + x)\, dx =$$

$$= 0 = m_\xi$$

mely , tehát idő független,

A korrelációs sorozata:

$$r_\xi(m,n) = E\{\xi_m \xi_{m+n}\} = E\{\sin(2\pi f_o mT + \varsigma)\sin(2\pi f_o (m+n)T + \varsigma)\} =$$

$$= E\left\{\frac{1}{2}(\cos(2\pi f_o nT) - \cos(2\pi o_o (2m+n)T + 2 * \varsigma))\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2\pi f_o nT) = r_\xi(n)$$

mely csak a minták időtávolságának egydimenziós függvénye.

A jel átlag teljesítménye (mely egyenlő most a szórásnégyzettel is):

$$P_\xi = r_\xi(0) = \frac{1}{2}$$

Ezek alapján megállapítható, hogy ξ_n legalább gyengén stacioner folyamat.

(Gyakorlásképpen számítsuk ki a folyamat amplitúdó sűrűségét is.)

Megjegyezzük, hogy az n-ed rendű eloszlásokról belátható az idő-eltolás invariancia, tehát a véletlen kezdőfázisú szinusz stacioner folyamat.

Számítsuk ki a frekvencia függvényében a teljesítménysűrűségét:

$$S_\xi(f) = \begin{aligned} & F\{c_\xi(n)\} = F\{r_\xi(n)\} = F\left\{\frac{1}{2}\cos(2\pi f_o nT)\right\} = F\left\{\frac{1}{4}(e^{j2\pi f_o nT} + e^{-j2\pi f_o nT})\right\} = \\ & = \frac{1}{4}\left(\tilde{\delta}_F(f - f_0) + \tilde{\delta}_F(f + f_0)\right) \end{aligned}$$

Mint látjuk a véletlen jelünk teljes (1/2 értékű) teljesítménye a frekvencia tengely felett $\pm f_o$ frekvenciánál, nulla sávszélességet foglal el. A Dirac-delta megjelenése a teljesítmény sűrűség spektrumban, vonalas összetevőt jelent és periodikus korrelációjú komponensre utal, melyet véletlen fázisú periodikus jel okoz.

4.2.5 Fehér zaj

Definíció:

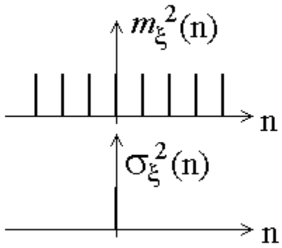
Ha a legalább gyengén stacionárius ξ folyamat $S_\xi(f)$ spektrális teljesítménysűrűsége minden frekvencián azonos, akkor ξ *fehér zaj folyamat*.

Egy gyengén stacionárius ξ folyamat $S_\xi(f)$ függvénye akkor lesz frekvencia független, ha korrelálatlan is.

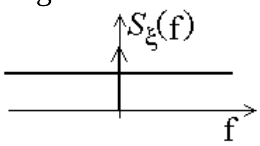
Gyengén stacioner jel időtartományi korrelálatlansága és a frekvencia tartományi spektrumának fehérsége (egyenletessége) ugyanannak a tulajdonságnak a két különböző tartományban való megjelenési formája.

Példa:

Legyen a ξ_n gyengén stacionárius diszkrét idejű véletlen jel.
A korrelációsorozata: $r_\xi(n) = c_\xi(n) + m_\xi^2(n)$, ahol $c_\xi(n) = \sigma^2\delta_n$ és $m_\xi(n) = m$.



Mi lesz ξ_n spektrális teljesítménysűrűsége?
Megoldás:



Mert δ_n Fourier-transzformáltja állandó és egy állandó sorozat Fourier-transzformáltja $\delta(f)$. Mivel (a 0 frekvenciát b kivéve) minden frekvencián állandó $S_\xi(f)$, tehát ξ_n fehér zaj folyamat.

4.2.6 ARMA folyamat

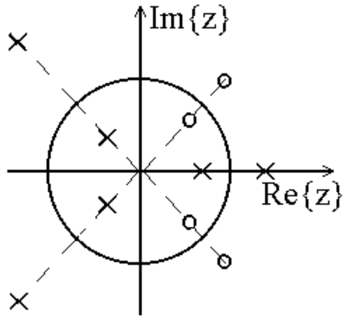
Definició:

ARMA folyamatnak nevezzük azt a gyengén stacioner folyamatot, melynek $\mathbf{S}_\xi(z)$ teljesítménysűrűsége **racionális törtfüggvény**.

ARMA folyamat $S_\xi(z) = \dfrac{A(z)}{B(z)}$

teljesítménysűrűsége (egy konstans szorzó erejéig) mindig megadható a pólusaival és a zérusaival, és az $\mathbf{S}_\xi(z) = \mathbf{S}_\xi(z^{-1})$ összefüggés miatt a pólusok és a zérusok is az egységkörre szimmetrikusan helyezkednek el.. Ha az egységkörön nincsenek gyökök (vagy ha vannak, akkor páros multiplicitásúak), akkor $\mathbf{S}_\xi(z)$ felbontható az alábbi alakban:

$$S_{\xi}(z) = \frac{A_o(z)\ A_o(z^{-1})}{B_o(z)\ B_o(z^{-1})}$$



Valódi tört ARMA folyamat autokorrelációs sorozata – az egységkörhöz viszonyítva kívül és belül is elhelyezkedő pólusoknak megfelelően – komplex alapú exponenciális sorozatok összegének páros függvénye.

MA folyamat, $S_{\xi}(z) = A_o(z)\ A_o(z^{-1})$, (vagy nem valódi tört ARMA egészrésze) autokorrelációja véges tartójú (páros) sorozat.

4.2.7 Keskeny és széles sávú jelek, komponensek

A véletlen stacioner jelek átlagteljesítményét a teljesítménysűrűségük frekvenciatengely menti integrálásával is megkaphatjuk. A teljesítménysűrűség spektrum a teljes jelenergiának az alapsávi frekvencia tengely feletti eloszlását írja le.

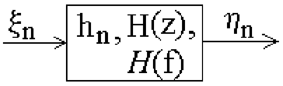
Ilyen értelemben szélesebb ill. keskenyebb sávú jelnek tekinthetjük azokat a jeleket, melyek teljes átlag teljesítményét az alapsáv szélesebb vagy keskenyebb részsávja feletti integrálással kaphatjuk meg.

Az előző pontokban megismert jelosztályokkal kapcsolatban tehát az alábbiakat állapíthatjuk meg:

- A legkeskenyebb sávszélességű véletlen jelek a nulla sávszélességű, azaz vonalas spektrumú (Dirac-delta) periodikus véletlen jelek melyek kezdő fázisa véletlen, de az egyes minták egymással determinisztikus kapcsolatban vannak.
- A legnagyobb sávszélességű jel a frekvencia független spektrumú (azaz a teljes alapsávot egyenletesen kitöltő spektrumú) fehér zaj, azaz a korrelálatlan minták sorozata.
- Az ARMA jeleket színes jeleknek is nevezhetjük, melyekre frekvencia függő teljesítmény sűrűség spektrum jellemző, az egymás utáni mintái nem determinisztikusan meghatározottak de statisztikusan kisebb-nagyobb mértékben korreláltak.
  A jelben lévő keskenysávú, azaz periodikus összetevőket az időtartományban t_i távolságban lévő minták erősebb korreláltsága jelzi (t_i periódusnyi távolságra a minták "ismétlődni akarnak"),

a frekvencia tartományban az *S* (f) spektrumnak $f_i = 1/t_i$ frekvencia környéki erősebb kiemelése jelzi, melyet
az operátor tartományban az egységkörhöz közeli, az adott frekvencia irányában elhelyezkedő pólus (négyes) mutat illetve okoz.

4.3 Stacioner folyamat áthaladása lineáris, invariáns rendszeren



Adjuk a ξ_n (legalább gyengén) stacionárius folyamatot a h_n impulzusválaszú lineáris, invariáns rendszer bemenetére. Ekkor a kimeneti η_n véletlen sorozat:

$$\eta_n = h_n * \xi_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \cdot \xi_{n-i} \; .$$

<u>Tulajdonságai:</u>

- Várható érték:

  $m_\eta = \mathrm{E}\{\eta_n\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \cdot \mathrm{E}\{\xi_{n-i}\} = m_\xi \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i$, mivel m_ξ idő független. Figyeljük meg,

  hogy $A = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i = H(f=0) = H(z=1)$ a rendszer DC átvitele $\Rightarrow$ $\boxed{m_\eta = A \cdot m_\xi}$.

- Autókorrelációs függvény:

  $$r_\eta(n) = \mathrm{E}\{\eta_m \cdot \eta_{m+n}\} = \mathrm{E}\left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \cdot \xi_{m-i} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \cdot \xi_{m+n-k} \right\} = \mathrm{E}\left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_i \cdot h_k \cdot \xi_{m-i} \cdot \xi_{m+n-k} \right\}$$

  $$r_\eta(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_i \cdot h_k \cdot \mathrm{E}\{\xi_{m-i} \cdot \xi_{m+n-k}\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_i \cdot h_{j+i} \cdot \mathrm{E}\{\xi_{m-i} \cdot \xi_{m-i+n-j}\} \quad (k = j + i)$$

  Minthogy $\mathrm{E}\{\xi_{m-i} \cdot \xi_{m-i+n-j}\} = r_\xi(n-j)$ és $\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_i \cdot h_{j+i} = h_n * h_{-n}$,

  $$\boxed{r_\eta(n) = r_\xi(n) * h_n * h_{-n}}$$

- Teljesítményspektrum:

  $S_\eta(f) = \boldsymbol{F}\{r_\eta(n)\} = \boldsymbol{F}\{ r_\xi(n) * h_n * h_{-n} \} = S_\xi(f) \cdot H(f) \cdot H^*(f) \Rightarrow \boxed{S_\eta(f) = S_\xi(f) \cdot |H(f)|^2}$

  $\Rightarrow$ A szűrő fáziskarakterisztikája nincs hatással a szűrő kimenetének teljesítményspektrumára.

  $S_\eta(z) = \boldsymbol{Z}\{r_\eta(n)\} = \boldsymbol{Z}\{ r_\xi(n) * h_n * h_{-n} \} = S_\xi(z) \cdot H(z) \cdot H(z^{-1})$.

- Szórásnégyzet:

  Mivel $r_\eta(n) = \boldsymbol{F}^{-1}\{S_\eta(f)\} = \frac{1}{f_c} \int_{-f_c/2}^{f_c/2} S_\eta(f) e^{j2\pi nfT} df$, $\boxed{\sigma_\eta^2 = r_\eta(0) = \frac{1}{f_c} \int_{-f_c/2}^{f_c/2} S_\eta(f) df}$.

<u>Megjegyzés:</u>

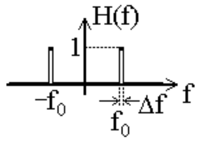
– Ha ξ_n ARMA folyamat, $S_\xi(z) = \frac{A_\xi(z)}{B_\xi(z)} = \frac{A'_\xi(z) \cdot A'_\xi(z^{-1})}{B'_\xi(z) \cdot B'_\xi(z^{-1})}$, és

ha H(z) is ARMA rendszer, $H(z) = \frac{M(z)}{N(z)}$, akkor a kimeneti stacioner folyamat is

ARMA lesz, melynek teljesítménysűrűsége

$S_\eta(z) = \frac{A'_\xi(z) \cdot A'_\xi(z^{-1}) \cdot M(z) \cdot M(z^{-1})}{B'_\xi(z) \cdot B'_\xi(z^{-1}) \cdot N(z) \cdot N(z^{-1})}$ szerinti lesz, tehát $S_\eta(z)$-ben megjelennek a bemenet és a szűrő (szimmetrizált) gyökei, vagy eltűnnek gyökök, ha a szűrő gyökeik kiejtik a bemenet valamely gyökét.

– A spektrális teljesítménysűrűség értelmezése. Vezessük keresztül a nulla várható értékű ξ_n folyamatot az ábrán látható tűszűrőn, és figyeljük meg a kimeneti teljesítményt (szórásnégyzetet):

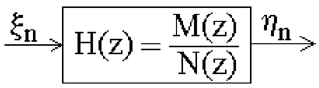


$$\sigma_\eta^2 = r_\eta(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\eta(\mathrm{f})df = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\mathrm{f})| \cdot S_\xi(\mathrm{f})df = 2 \cdot \int_{f_0}^{f_0+\Delta f} S_\xi(\mathrm{f})df \approx 2 \cdot \Delta\mathrm{f} \cdot S_\xi(\mathrm{f}_0)$$

Mivel a szűrő kimenetén csak az f_0 frekvencia körüli összetevők jelennek meg, ezen összetevők összteljesítményével arányos az $S_\xi(f_0)$-lal.

Feladatok:

1.

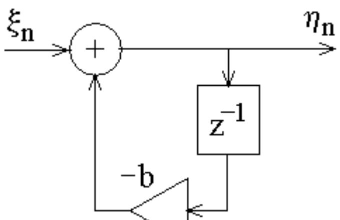


A bemeneti folyamat legyen nulla várható értékű, fehér zaj: $m_\xi = 0$ és $r_\xi(0) = P_\xi = \sigma_\xi^2 = 1$, $r_\xi(n) = 0$, ha $n \neq 0$.
Mi lesz a fenti H(z)-jű lineáris, invariáns, ARMA rendszer kimenetének spektrális teljesítménysűrűsége?

Megoldás: $S_\eta(z) = S_\xi(z) \cdot H(z) \cdot H(z^{-1}) = \sigma_\xi^2 \cdot \frac{M(z)}{N(z)} \cdot \frac{M(z^{-1})}{N(z^{-1})} \rightarrow S_\eta(\mathrm{f}) = S_\eta(z = e^{j2\pi fT})$.

2.

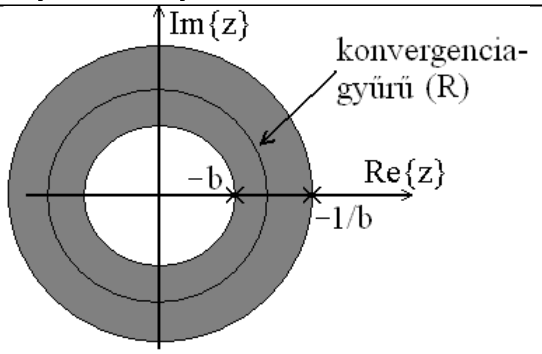
Tekintsük az alábbi hálózattal megadott rendszert:



Mi lesz a kimeneti folyamat autókorreláció-sorozata és spektrális teljesítménysűrűsége, ha $m_\xi = 0$ és $\sigma_\xi^2 = 1$?

Megoldás:

$$H(z) = \frac{1}{1 + bz^{-1}} \quad \searrow$$
$$\sigma_\xi^2 = 1 \rightarrow S_\xi(z) = 1 \quad \nearrow$$
$$S_\eta(z) = S_\xi(z)H(z)H(z^{-1}) = \frac{1}{\left(1 + bz^{-1}\right) \cdot \left(1 + bz\right)}$$



$$S_\eta(z)=\frac{1}{\left(1+bz^{-1}\right)\cdot\left(1+bz\right)}=\frac{\frac{1}{b}z}{\left(\frac{1}{b}+z\right)\cdot\left(1+bz\right)}=\frac{p_1}{\frac{1}{b}z+1}+\frac{p_2}{1+bz}$$, ahol a p_1 és p_2

együttható a $p_1 + p_2 = 1$; $p_1 \cdot b + p_2/b = 1/b$ egyenletrendszerrel számítható.
$r_\eta(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{S_\eta(z),\ z \in R\}$ és $S_\eta(f) = S_\eta(z = e^{j2\pi fT})$ etc.

A megoldás az időtartományban is kiszámítható. Ugyanis

$$h_n=\begin{cases}(-b)^n, & \text{ha } n \ge 0\\ 0, & \text{ha } n < 0\end{cases} \rightarrow r_\eta(n) = h_n * h_{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m \cdot h_{m+n}\ .$$

4.3.1 Fehérítő (analízis), és színező (szintézis) szűrők

Definíció:

Az olyan rendszert, amely a bemenetére adott ξ_n folyamatból a kimenetén fehér zaj folyamatot (η_n) állít elő, fehérítő szűrőnek (vagy analízis szűrőnek) nevezzük.

$$\xrightarrow[S_\xi(z)]{\xi_n} \boxed{H(z)=\frac{M(z)}{N(z)}} \xrightarrow[S_\eta(z)]{\eta_n}$$

ARMA folyamatra létezik tökéletes ARMA analízis szűrő.

H(z)-t úgy kell megválasztani, hogy $S_\eta(z)$ konstans legyen:

$S_\eta(z) = S_\xi(z)\cdot H(z)\cdot H(z^{-1}) =$ *konstans*.

Ha $S_\xi(z)=\dfrac{A'_\xi(z)\cdot A'_\xi(z^{-1})}{B'_\xi(z)\cdot B'_\xi(z^{-1})}$ alakú, akkor

a $H(z)=\dfrac{M(z)}{N(z)}=\dfrac{B'_\xi(z)}{A'_\xi(z)}$ esetén kapunk a kimeneten fehér zajt.

Feltételeztük, hogy az egységkörön vagy nincs gyök (vagy ha van, akkor páros multiplicitású), és az A’ (z), B’(z) polinomok az egységkörön belüli gyököket tartalmazzák, így a szűrő stabil és minimál-fázisú.

Megjegyzés:

A fehérítő szűrőt leggyakrabban ismeretlen ξ_n folyamatok spektrális sűrűségfüggvényének meghatározására használják: H(z) adaptív, amit addig változtatnak, amíg a kimeneten korrelálatlan folyamatot mérnek. Ekkor H(z) a fentiek alapján egyértelműen meghatározza $S_\xi(z)$-t.

A fenti feladat megfordítottja:

Az olyan rendszert, amely a bemenetére adott ξ_n fehér zajból a kimenetén adott teljesítménysűrűségű η_n folyamatot állít elő, színező (szintézis) szűrőnek nevezzük.

Az előírt $S_\eta(z) = \dfrac{A'_\eta(z) \cdot A'_\eta(z^{-1})}{B'_\eta(z) \cdot B'_\eta(z^{-1})}$ alapján, az alkalmazandó stabil, minimál-fázisú szűrő transzferfüggvénye:

$$H(z) = \frac{M(z)}{N(z)} = \frac{A'_\eta(z)}{B'_\eta(z)} \ .$$