MEGBÍZHATÓSÁG MODELLEZÉS

Műszaki informatika szak

Hibatűrő rendszerek modul

1997/98. 2. félév

Jereb László, Telek Miklós,

Horváth András, Pfening András

Tartalomjegyzék

1. fejezet

MEGBÍZHATÓSÁGI MOTIVÁCIÓK, ALAPFOGALMAK

1.1. A megbízhatóságelmélet jelentősége

1.1.1. Információs társadalom

1. Számítástechnikai alkalmazási motivációk *(gyors, pontos munka)*
   - bonyolult feladatok elvégzése *(pl. erőművi szabályozás)*
   - időigényes tevékenység *(pl. tudomány)*
   - elosztott információ, adatbázis *(pl. repülőgépes helyfoglalás)*
2. Mind szélesebb körű, fontos számítástechnikai alkalmazás
   - egyre bonyolultabb funkciók
   - egyre bonyolultabb rendszerek
3. Növekvő felhasználói kockázat
   - környezet
   - információk *(pl. adatbázisok)*
   - eszközök
   - ember

   Kritikusak a meghibásodások $\longrightarrow$ megbízhatóság!

1.1.2. Meghibásodások

1. Probléma: a meghibásodások véletlenszerűen keletkeznek
   - nem kiszámítható időpontban
   - nem kiszámítható helyen
2. Cél:
   - meghibásodások bekövetkezésének megakadályozása,
   - de legalább a hatásuk korlátozása
3. Lehetőség a meghibásodás bekövetkezésének megakadályozásában
   - nagymegbízhatóságú alkatelemek *(pl. redundáns)*
   - megbízhatóságnövelési módszerek alkalmazása *(pl. alulterhelés)*
4. Lehetőség a meghibásodás hatásának korlátozásában
   - térben *(redundancia)*
   - időben *(karbantartás, javítás)*
5. Beavatkozási lehetőség
   - gyártók, felhasználók, szolgáltatók, szolgáltatás igénybe vevők
   - eltérő lehetőségek a meghibásodások megakadályozásában vagy a meghibásodások hatásának korlátozásában
6. A különböző beavatkozási lehetőségek hatására eltérő a költségek megosztása is
   - előállítási, üzemeltetési költség
   - kockázat, veszteség *(pl. kötbér)*
7. Gazdaságos műszaki kompromisszumot kell találni, **tehát:**
   - ismerni kell a meghibásodások bekövetkezési jellemzőit
   - tudni kell megakadályozásuk, korlátozásuk lehetőségeit
   - fel kell tudni mérni a megoldások hatását *(javulás, költség)*
   - de általában csak olyan terméket szabad létrehozni, amire adott az igény, azaz megtérül, megfizetnek
     $\longrightarrow$ *mérnöki tervezési-alkalmazási tevékenység kulcskérdése*

1.2. A tantárgy

1.2.1. Tartalmi kérdések

1. A tantárgy célja a megbízhatóságelmélet alapfogalmainak, modelljeinek, számítási módszereinek megismertetése

2. A tantárgy környezete

   - előzmények
     - Valószinűségszámítás
     - Informatika
     - Hibatűrő számítógépstruktúrák
     - Programozás és diagnosztika
   - folytatás
     - Hibatűrő rendszerek tervezése

3. A tantárgy felépítése — Miről szól a tárgy?

   - megbízhatósági alapfogalmak:
     a megbízhatóság modellezése
   - alkatrészek megbízhatósága:
     alkatrészmegbízhatóság modellezése, előrejelzése
   - nem javított rendszerek megbízhatósága:
     rendszerek megbízhatóságának meghatározása rendszerelemek megbízhatósági jellemzői alapján
   - javított rendszerek megbízhatósága:
     javítások, karbantartás modellezése, hatásuk a rendszerek megbízhatósági jellemzőire
   - megbízhatóság és teljesítőképesség:
     nem ideális megbízhatóságú rendszerek teljesítőképességének modellezése

4. Miről nem szól a tárgy?

   - alkatrészmegbízhatóság fizikai kérdései
   - konkrét megbízható áramköri megoldások
   - konkrét megbízható rendszerek

   Azaz csak az elméleti szempontok, modellek, számítási módszerek!

1.3. A megbízhatóság jellemzése

1.3.1. A megbízhatóság fogalma

1. A megbízhatóság definiciója
   A termék azon tulajdonsága, hogy előírt funkcióit, adott körülmények között teljesíti.

2. A megbízhatóság jellemzésének problémái

   - termék minősége: általánosan sokparaméterű
   - termék paraméterei: $\{X(t) = \{X_i(t)\}, \quad i = 1, 2, \cdots, n\}$ egy sokdimenziós véletlen folyamat, ahol $X_i(t)$ valós
   - kezdetben leszűkítjük érdeklődésünket a kétállapotú esetre, azaz, feltesszük, hogy a termék eleget tesz a vele szemben támasztott követelményeknek, ha $X(t) \in U$, s nem tesz eleget, ha $X(t) \in D$, ahol

     $$X = U \cup D, \quad U \cap D = \emptyset$$

   - a termék paraméterváltozának demonstrálása egy kétdimenziós ábrán

1.3.2. A meghibásodási-javítási folyamat jellemzői

1. Meghibásodási/javítási folyamatok jellemzői

   - $t_0, t_2, t_4, \cdots, t_{2n}, \cdots$: az $n+1$. működési időszakasz kezdete
   - $t_1, t_3, \cdots, t_{2n-1}, \cdots$: az n. kiesési időszakasz kezdete (az n. meghibásodás időpontja)
   - $\tau_n = t_{2n-1} - t_{2n-2}$: az n. működési időszakasz hossza (véletlen változó)
   - $\nu_n = t_{2n} - t_{2n-1}$: az n. kiesési időszakasz hossza (véletlen változó)
   - $\gamma_n = \tau_n + \nu_n = t_{2n} - t_{2n-2}$: az n. működési-kiesési ciklus hossza (véletlen változó)
   - $F_n(t) = Pr(\tau_n \le t)$: az n. működési időszakasz hosszának *eloszlásfüggvénye*
   - $G_n(t) = Pr(\nu_n \le t)$: az n. javítási időszakasz hosszának *eloszlásfüggvénye*
   - $H_n(t) = Pr(\gamma_n \le t)$: az n. működési-javítási időszakasz hosszának *eloszlásfüggvénye*

- $f_n(t)$: az n. működési időszakasz hosszának *sűrűségfüggvénye*, (ha létezik)

$$f_n(t) = \frac{dF_n(t)}{dt}$$

Általában létezik, mivel nincsenek kitüntetett meghibásodási időpontok

- $g_n(t)$: az n. kiesési időszakasz hosszának *sűrűségfüggvénye*, (ha létezik)

$$g_n(t) = \frac{dG_n(t)}{dt}$$

Sokszor nem létezik, mivel lehetnek megadott hosszúságú javítási időszakaszok

- $h_n(t)$: az n. működési-kiesési időszakasz hosszának *sűrűségfüggvénye*, (ha létezik)

$$h_n(t) = f_n(t) \otimes g_n(t) = \int_0^t f_n(\tau) g_n(t-\tau) d\tau,$$

a két időszakasz konvolúciója

2. Nem javított és javított rendszerek fogalma

- nem javított rendszerek
  - $0 < \tau_1 < \infty$
  - $\nu_1 = \infty$
  - $\gamma_1 = \infty$
- javított rendszerek
  - $0 < \tau_k < \infty, \quad \forall k = 1, 2, \cdots$
  - $0 < \nu_k < \infty, \quad \forall k = 1, 2, \cdots$
  - $0 < \gamma_k < \infty, \quad \forall k = 1, 2, \cdots$

3. Nem javított rendszerek megbízhatósági jellemzői

- alapjellemző: $r(t)$, a hibamentes működés valószinűsége *(sokszor megbízhatóságnak nevezik, survivability — reliability)*:
A definicióból következően:

$$r(t) = \mathbf{P}(X(s) \in U, \ \forall 0 \ \leq \ s \ \leq \ t) = \mathbf{P}(\tau_1 > t) = 1 - F(t) \tag{1.1}$$

$r(t)$ tulajdonságai:

  - $r(0) = 1$, — kezdetben minden termék jó (?)
  - $\lim_{t \to \infty} r(t) = 0$, — valamikor minden termék meghibásodik
  - $r(t)$ monoton fogyó, — (sőt szigorúan monoton is, ha nincsenek garantáltan hibamentes időszakaszok)

- $q(t) = P(\exists s \leq t$, amelyre $X(s) \in D)$: *sokszor megbízhatatlanságnak nevezik.* A definicióból következően:

$$q(t) = \mathbf{P}(\exists s \leq t : X(s) \in D) = \mathbf{P}(\tau_1 \leq t) = F(t) \tag{1.2}$$

$q(t)$ tulajdonságai: eloszlásfüggvény tulajdonságok

  - $q(0) = 0$
  - $\lim_{t \to \infty} q(t) = 1$
  - $q(t)$ monoton növő

- $MTFF = E(\tau_1)$: az első meghibásodás várható ideje (Mean Time to First Failure) *(általánosan tetszés szerinti magasabb momentumok is)*
- $MTFF$ és $r(t)$ kapcsolata:

$$MTFF = \mathbf{E}[\tau_1] = \int_{t=0}^{\infty} t dF(t) \ = \ - \int_{t=0}^{\infty} t dr(t) \ = - \left[r(t) \ t\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} r(t) dt$$

amelyből, ha $\lim_{t \to \infty} t \ r(t) = 0$ (ami teljesül, ha $\mathbf{E}[\tau_1]$ véges), akkor

$$MTFF = \int_0^{\infty} r(t) dt \tag{1.3}$$

4. Javított rendszerek megbízhatósági jellemzői

   - alapjellemző: $d(t)$, rendelkezésreállási valószinűség: dependability

   $$d(t) = \mathbf{P}(X(t) \in U) \tag{1.4}$$

   - készenléti tényező: availability

   $$K = \lim_{t\to\infty} d(t) \tag{1.5}$$

   ha létezik.

   - időparaméterek:
     - $MUT_n = \mathbf{E}[\tau_n]$: várható működési idő (Mean Up Time)
     - $MDT_n = \mathbf{E}[\nu_n]$: várható kiesési idő (Mean Down Time)
     - $MCT_n = \mathbf{E}[\gamma_n] = \mathbf{E}[\tau_n]+\mathbf{E}[\nu_n]$: várható ciklusidő (Mean Cycle Time)
   - K és az időparaméterek kapcsolata, ha
     - $E(\tau_n) = MUT, \quad \forall n$
     - $E(\nu_n) = MDT, \quad \forall n$
     - $E(\gamma_n) = MCT = MUT + MDT, \quad \forall n$

   akkor

   $$K = \frac{MUT}{MUT + MDT} \tag{1.6}$$

5. A minőségváltozás demonstrálása egy kétértékű (U, D) ábrával

t_i	0	1000	2000	3000	...
$N(t_i)$	100	90	81	73	...
$N(t_{i-1}) - N(t_i)$		10	9	8	...

1.1. táblázat: A működési idő hisztogramjának meghatározásához végzett kísérlet eredményei

1.4. A meghibásodási tényező ($\lambda(t)$)

1.4.1. $f(t)$ alkalmazásának korlátai

1. Legyen $N(t_i)$ a t_i időpontban működő alkatrészek száma

2. Ekkor $r(t)$ becslése:
$$\hat{r}(t_i) = \frac{N(t_i)}{N(t_0)}$$

3. $f(t)$ becslése:
$$\hat{f}(t_i) = \frac{N(t_{i-1}) - N(t_i)}{N(t_0)} \frac{1}{\Delta t}$$

4. $f(t)$ alkalmazásának demonstrálása: pl. 100 alkatrész, javítás és csere nélküli működtetése (ld. 1.1. táblázat)

(**Kérdés: Javul, romlik vagy változatlan az alkatrész?**)

1.4.2. $\lambda(t)$ bevezetése

1. $\lambda(t)$ meghibásodási tényező (intenzitás) — failure rate
$$\frac{N(t_{i-1}) - N(t_i)}{N(t_{i-1})} \frac{1}{\Delta t} = \frac{\frac{N(t_{i-1}) - N(t_i)}{N(t_0)} \frac{1}{\Delta t}}{\frac{N(t_{i-1})}{N(t_0)}} = \frac{\hat{f}(t)}{\hat{r}(t)}$$
$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{r(t)} \qquad (1.7)$$

2. λ dimenziója: 1/óra, 1/h, 1 FIT = $1.0e^{-9}$/h

t	0	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$r(t)$	1	0.990	0.905	0.368	$4.5\ 10^{-5}$	$3.7\ 10^{-44}$

1.2. táblázat: Néhány hibamentes működési valószinűség eredmény $\lambda = 10^{-6}$/óra esetén

3. $\lambda(t)$ kapcsolata $r(t)$-vel

$$\lambda(t) \;=\; \frac{1}{r(t)}\frac{dF(t)}{dt} = \frac{-1}{r(t)}\frac{dr(t)}{dt} \tag{1.8}$$

A differenciálegyenletet megoldva:

$$-\int_0^t \lambda(u)\,du \;=\; ln\ r(t) - ln\ r(0),$$

amiből $r(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett:

$$r(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(u)du} \tag{1.9}$$

1.4.3. $\lambda(t)$ időfüggése

1. a teknőgörbe és szakaszai
   - I. kezdeti meghibásodási szakasz
     - gyártási, tervezési hibák
     - bejáratási, karbantartási kérdések
   - II. véletlen meghibásodások szakasza
   - III. elhasználódási szakasz
     - öregedés, kopás
     - karbantartási kérdések
   - élettartam és várható működési idő kapcsolata
2. exponenciális eloszlás, örökifjúság
   - exponenciális szakasz jellege, függvényei ($r(t)$, $F(t)$, $f(t)$)
     - $\lambda(t) = \lambda, \quad \forall\, t$

- $f(t) = \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda t}$
- $r(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$
- $F(t) = 1\ -\ \mathrm{e}^{-\lambda t}$

- MTFF meghatározása:

$$MTFF = \int_0^\infty r(t)dt\ ,$$

mivel a L'Hospital szabály alkalmazásával:

$$\lim_{t\to\infty} t\ r(t) = \lim_{t\to\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0,$$

Így

$$MTFF = \int_0^\infty r(t)dt\ = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}dt\ =\ \frac{-1}{\lambda}\ [\mathrm{e}^{-\lambda t}]_0^\infty\ =\ \frac{1}{\lambda} \tag{1.10}$$

- örökifjúság demonstrálása

$$P(\tau \geq t + \Delta t | \tau \geq t, \Delta t \geq 0) = \frac{r(t+\Delta t)}{r(t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+\Delta t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda(\Delta t)}$$

Csak a Δt időkülönbségtől függ, s nem függ t-től közvetlenül!

- exponenciális eloszlás alkalmazása: véletlen szakasz
- exponenciális eloszlás közelítése

$$r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda\ t)^k}{k!} = 1 - \lambda\ t + 0.5\ (\lambda\ t)^2 - ...$$

ha $\lambda\ t < 0.1$, akkor jó közelítéssel $r(t) = 1 - \lambda\ t$

3. egyéb működési idő eloszlások

- normális eloszlás
  - $f(t) = \dfrac{1}{\sigma\ \sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-m)^2}{2\ \sigma^2}}$
  - $r(t) = \dfrac{1}{\sigma\ \sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\frac{(t-m)^2}{2\ \sigma^2}} dt$
  - $\lambda(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{(t-m)^2}{2\ \sigma^2}}}{\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\frac{(t-m)^2}{2\ \sigma^2}} dt}$

- alkalmazás: öregedő alkatrészek $m > 3\,\sigma$

- Weibull eloszlás
  - $r(t) = \mathrm{e}^{-(b\,t)^a}$
  - $F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-(b\,t)^a}$
  - $f(t) = a\,b\,(b\,t)^{a-1}\,\mathrm{e}^{-(b\,t)^a}$
  - $\lambda(t) = a\,b\,(b\,t)^{a-1}$
  - alkalmazás: mindhárom teknőgörbe szakasz leírására alkalmas
    * I. szakasz: $a < 1$
    * II. szakasz: $a = 1, \rightarrow \lambda = b$
    * III. szakasz: $a > 2$
    * megjegyzés: $1 < a \leq 2$
- lognormális eloszlás
  - ha Y lognormális eloszlású v.v. akkor $logY$ normális eloszlású (innét származik az elnevezése), és ugyan úgy két paraméterrel adható meg az eloszlás
  - alkalmazás: öregedő alkatrészek $m < 3\,\sigma$

1.4.4. λ igénybevétel- és környezetfüggése

1. megbízhatósági adatok, megbízhatósági jellemzők meghatározása
   - üzemeltetési adatok (eltérő körülmények összevetése)
   - gyártónál végzett vizsgálatok (alapadatok, különböző tényezők hatásának elemzése)
   - eredmény: ($\lambda = \lambda$(hőmérséklet, környezet...))
2. igénybevétel- és környezetfüggés figyelembevétele
   - csökkentett terhelés (derating)
   - gyorsított élettartam vizsgálatok hatásának elemzése)
3. igénybevételi (stressz) és környezeti alapmodellek
   - λ és környezet: (kategória példák)
     - földi rögzített, mobil
     - hajó, repülőgép, rakéta

- hatása: két nagyságrenddel növekvő λ

- λ és hőmérséklet:
  - Arrhenius törvényből származtatva:

$$\lambda = \lambda_0 \, \mathrm{e}^{\frac{E_a}{k}\,(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T})} \tag{1.11}$$

    Jelölések:
    * E_a: aktivációs energia [eV]
    * k: Boltzmann állandó $1.38\;10^{-23}\;J/K \;=\; 8.6\;10^{-5}\;eV/K$
    * T, T_0: hőmérséklet [K]
  - 2-es alapú közelítés

$$\lambda = \lambda_0 \, \mathrm{e}^{\frac{E_a}{k}\,\frac{T-T_0}{TT_0}} = \lambda_0 \, 2^{\frac{\Delta\vartheta}{\Delta\vartheta_f}} \tag{1.12}$$

    ahol $\vartheta_f = \dfrac{kTT_0}{E_a log_2 \mathrm{e}}$, mivel $\mathrm{e}^x = 2^{x log_2 \mathrm{e}}$
    Jelölések:
    * $\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_0 = T - T_0$: hőmérsékletkülönbség [C]
    * $\Delta\vartheta_f$: félélettartamhoz tartozó hőmérsékletkülönbség [C]

- λ és terhelés — jellegzetesen:

$$\lambda = \lambda_0 \, (\frac{S}{S_0})^i \tag{1.13}$$

  Jelölések:
  - S, S_0: terhelés $(U,\ I,\ P)$, illetve névleges terhelés (U_0, I_0, P_0)
  - $i = 3...8$: kitevő (*jelentős hatás*)
- λ és ciklikus igénybevétel: ciklusszám - idő megfeleltetés
- λ és tanulás: új, bejáratott gyártmány (10, 1 szorzó)
- λ és minőség: alkatrésztípus, stb. függő
- λ és technológia: alkatrésztípus-függő

4. λ becslése meghibásodási adatok alapján

   - N elemű mintahalmazt vizsgálunk,
   - a vizsgálati időszakban K elem hibásodik meg $\tau_1, \ldots, \tau_K$ időpontokban (hiba idők, nem cenzorált adatok),

- $N-K$ elem esetén a vizsgálatot abbahagyjuk $\delta_1, \ldots, \delta_{N-K}$ időpontokban az elem meghibásodása elött (leállási idők, cenzorált adatok)
- ezekhez az adatokhoz tartozó likelihood függvény megadja, hogy adott λ esetén mennyire valószínű az adatok előfordulása

$$F_L(\tau_1, \ldots, \tau_K, \delta_1, \ldots, \delta_{N-K}, \lambda) = \prod_{i=1}^{K} f_\lambda(\tau_i) \prod_{i=1}^{N-K} (1 - F_\lambda(\delta_i))$$

- a likelihood függvény maximumához tartozó λ értékkel becsülhető a meghibásodási tényező a rendelkezésre álló adatok alapján.
- mivel a likelihood függvény szorzatokból áll, és mivel a likelihood függvénynek és logaritmusának ugyan azon λ értéknél van maximuma, így a gyakorlatban a likelihood függvény logaritmusát használják.

1.5. Alkatrészek megbízhatósági modellezése

1.5.1. Alkatrész megbízhatósági adatok forrása

1. üzemeltetési tapasztalatok (field data)

   - előnyök:
     - "pontos" információ
   - hátrányok:
     - túlzottan későn áll rendelkezésre (üzemeltetés megkezdése után)
     - a pontos üzemeltetési körülmények nem állnak rendelkezésre
     - egyéb motivációk (pl. a szervizszemélyzet érdekeltsége)

2. fokozott igénybevétel melletti vizsgálatok

   - előnyök:
     - gyártónál létrehozott feltételek
     - ismert, áttekinthető körülmények
     - használatavétel előtti eredmények
   - hátrányok:
     - mérési költségek
     - egyedi terméknél nem megoldás

3. azonos technológiájú, hasonló bonyolultságú alkatrészek adataiból származtatással

   - előnyök:
     - nem igényel speciális beruházást, csak egy szervezeti hátteret
     - az üzemeltetési adatgyűjtéshez hasonló pontosság
     - használatavétel előtti eredmények
   - hátrányok:
     - jelentős változtatáskor nincs megfelelő adat

1.5.2. Alkatrész megbízhatósági modellek

1. gyártók, felhasználók modelljei *(pl. Siemens, Ericsson)*

2. komplex "független" modellek *(legjellemzőbb a MIL-HDBK/217)*

3. példák:

   - monolit IC:

     $$\lambda_p = \pi_Q[C_1\pi_T\pi_V\pi_{PT} + (C_2 + C_3)\pi_E]\pi_L \tag{1.14}$$

     Jelölések:

     – π_Q: minőségi tényező
     – π_T: hőmérsékleti tényező (Arrchenius)
     – π_V: feszültség gyorsítási tényező
     – π_{PT}: programozási tényező (csak PROM-ra)
     – π_E: környezeti tényező
     – π_L: tanulási tényező
     – C_1, C_2: állandó, bonyolultságtól függ
     – C_3: állandó, tokozástól függ

   - kondenzátor:

     $$\lambda_p = \lambda_b\pi_Q\pi_E\pi_{SR}\pi_{CV}\pi_C \tag{1.15}$$

     – λ_b: alaplambda
     – π_{SR}: soros ellenállás tényezője
     – π_{CV}: névleges kapacitás tényezője
     – π_C: konstrukciós tényező

1.5.3. Komplex modellek implementálása

1. *RELECT: RELCOM*: BME - HT, laboratóriumi gyakorlatok

2. rugalmas felépítés, tetszés szerinti szövegesen megadható modell

3. alkatrészek, megbízhatósági modellek (alkatrészek modellhez rendelése)

4. alkatrész- és modelljellemzők, függvények és táblázatok

5. számítások, összehasonlítások

6. MIL-HDBK/217E implementálva

1.5.4. Példák

1. példa:

Adott egy IC, amelyre $\lambda = 100\ FIT$. Mekkora r(1 év)?
$t = 1$ év $= 8760$ óra $\simeq 10^4$ óra, ahonnan:

$$\lambda t = 10^{-3} \ll 1$$
$$q(1\text{ év}) \simeq 10^{-3}$$

Vajon mi történik, ha 100 darab alkatrészünk van? (0.1 !!)

2. példa:

Egy integrált áramkörre $\theta_v = 85°$ C -on vizsgálatokat végeztek, ahol $\lambda_v = 2.210^{-7}/h$ értéket határoztak meg. Az alkatrészt $\theta_N = 55°$ C-on akarják működtetni. Mekkora lesz a λ_N névleges meghibásodási tényező, ha $E_A = 0.25eV$?

Az Arrchenius törvény alkalmazásával:

1eV/k = 1.16 10^4 K, ahonnan 0.25 eV/k = 2900 K, s így

$$\frac{\lambda_N}{\lambda_v} = e^{\frac{E_A}{k}(\frac{1}{T_v} - \frac{1}{T_N})} = e^{2900(\frac{1}{358} - \frac{1}{328})} = \frac{1}{2.1}$$

Tehát:

$$\lambda_N = \frac{2.2}{2.1} 10^{-7}/h \simeq= 10^{-7}/h = 100\ FIT$$

3. példa: Egy ellenállásra a névleges $\theta_N = 25°$ C hőmérsékleten $\lambda_N = 200\ FIT$. Az alkatrészt $\theta_a = 75°$ C-on akarják működtetni. Mekkora lesz a λ_a aktuális meghibásodási tényező, ha $\theta_f = 10°$ C?

Megoldás:

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_N} = 2^{\frac{\Delta\theta}{\theta_f}} = 2^{\frac{75-25}{10}} = 2^5 = 32$$

Tehát:

$$\lambda_a = 32210^{-7} = 6.410^{-6}/h$$

2. fejezet

NEMJAVÍTOTT RENDSZEREK MEGBÍZHATÓSÁGA

2.1. Redundanciamentes (soros) rendszer

2.1.1. Redundanciamentes rendszer fogalma

1. a rendszer működéséhez minden elem működésére szükség van
2. grafikus ábrázolás
3. elemek funkcionális kapcsolata (nem azonos a strukturálissal)
4. (*kapcsolóelemre nincs szükség*)

2.1.2. Redundanciamentes rendszer számítása

1. legyen adott egy rendszer n elemmel
   - az egyes elemek meghibásodási időpontja $\tau_i,\ i = 1, ..., n$
   - az egyes elemek meghibásodási időpontjának eloszlásfüggvénye $F_i(t) = P(\tau_i \ \leq \ t),\ i = 1, ..., n$
   - kérdés: $\tau = min\ \tau_i, i = 1, ..., n,\ F_s(t) = P(\tau \ \leq \ t)$
   - megoldás:

$$F_s(t) = P(\tau \ \leq \ t) = P(min\ \tau_i \ \leq \ t) = 1 - P(min\ \tau_i \ > \ t) =$$

$$1 - P(\tau_i \ > \ t, \forall i)$$

Ha a τ_i meghibásodási időpontok mindegyike független egymástól:
(*nem szigorú feltétel, csak az első meghibásodási időpontig kell teljesülnie*)

$$F_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\tau_i > t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(\tau_i \leq t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_i(t))$$

amiből

$$1 - F_s(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - F_i(t)),$$

és

$$r_s(t) = \prod_{i=1}^{n} r_i(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\int_0^t \lambda_i(u)\, du} = e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(u)\, du} \tag{2.1}$$

2. exponenciális eloszlásra:

$$r_s(t) = \prod_{i=1}^{n} r_i(t) = e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t} = e^{-\lambda_s t} \tag{2.2}$$

ahol $\lambda_s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

$$MTFF_s = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \tag{2.3}$$

3. következmény, probléma

- növekvő alkatrészszám, növekvő λ
- összetettebb funkciókból elvileg a kisebb megbízhatóság következne
- miniatürizáció: azonos felületen azonos megbízhatóságot céllal
- de mindenképpen szükség van megbízhatóság növelési módszerekre

4. példa

- adott egy egyszerű soros rendszer, a félélettartamhoz tartozó hőmérsékletekkel
- a névleges hőmérséklet: $\theta_N = 25°$ C
- az üzemi hőmérséklet: $\theta_a = 55°$ C

alkatrész	n_i	$\theta = 25$		$\theta = 55$			
		λ_i	$n_i\lambda_i$	$\Delta\theta_{fi}$	a_i	$a_i\lambda_i$	$a_i n_i \lambda_i$
IC	1	200	200	30	2	400	400
ell.	4	100	400	10	8	800	3200
kond.	4	50	200	10	8	400	1600
forr.	20	5	100	15	4	20	400
össz.	29		900				5600

2.1. táblázat: Egyszerű soros rendszer megbízhatóságának számítása ($[\lambda] = FIT$)

- Kérdés: Mekkora a rendszer várható meghibásodási ideje a névleges és az üzemi hőmérsékleten?

$$MTFF_s(\theta = 25) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_k} n_i\lambda_i} = \frac{1}{900} = 1.1110^{-6}/h$$

$$MTFF_s(\theta = 55) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n_k} a_i n_i\lambda_i} = \frac{1}{5600} = 1.7810^{-5}/h$$

$$\frac{MTFF_s(\theta = 25)}{MTFF_s(\theta = 55)} = 6.2$$

  azaz a rendszer romlása 6.2-szeres. *Megjegyzés: Vigyázat! Ez egy átlagos érték, nem igaz minden alkatrészre!*

5. megbízhatóság növelési módszerek

- meghibásodások számának csökkentése
  - kevés alkatrész
  - kicsi λ
  - csökkentett tehelés (derating)
  - azonos λ értékre törekvés
- meghibásodások hatásának csökkentése
  - redundancia
  - fenntartás, javítás
  - két megoldás (redundancia, fenntartás) együttes alkalmazása

2.2. Redundáns alapstruktúrák megbízhatósága

1. aktív redundancia: forrótartalékolt rendszer (”melegtartalék”)

    - a rendszer n (azonos) elemből áll
    - a rendszer működéséhez egyetlen elem működésére van szükség
    - a ”funkcióban” vagy tartalékban lévő elemek meghibásodási tényezője között nincs különbség
    - grafikus ábrázolás
    - elemek funkcionális kapcsolata (nem azonos a strukturálissal)
    - kapcsolóelemre nincs szükség

2. passzív redundancia: hidegtartalékolt rendszer

    - a rendszer n (azonos) elemből áll
    - a rendszer működéséhez egyetlen elem működésére van szükség
    - a tartalékban lévő elem nem hibásodhat meg
    - grafikus ábrázolás
    - elemek funkcionális kapcsolata (nem azonos a strukturálissal)
    - hibafelismerő és kapcsolóelemre szükség van, (*de most még ideálisnak tekintjük*)

3. ”n-ből k jó” rendszer

    - a rendszer n (azonos) elemből áll
    - a rendszer működéséhez n-ből k elem működésére van szükség
    - a ”funkcióban” vagy tartalékban lévő elemek meghibásodási tényezője között nincs különbség
    - grafikus ábrázolás
    - elemek funkcionális kapcsolata (nem azonos a strukturálissal)
    - hibafelismerő és kapcsolóelemre szükség van, (*de most még ideálisnak tekintjük*)

2.2.1. Melegtartalékolt rendszer megbízhatósági jellemzői

1. a megbízhatósági paraméterek meghatározása

   - aktív redundancia
   - legyen adott egy rendszer n elemmel
   - az egyes elemek meghibásodási időpontja $\tau_i,\ i = 1, ..., n$
   - az egyes elemek meghibásodási időpontjának eloszlásfüggvénye $F_i(t) = P(\tau_i \le t),\ i = 1, ..., n$
   - $\tau = max\ \tau_i, i = 1, ..., n$
   - kérdés: $F_p(t) = P(\tau \le t)$
   - megoldás:

   $$F_p(t) = P(\tau \le t) = P(max\ \tau_i \le t) = P(\tau_i \le t, \forall i)$$

   Ha a τ_i meghibásodási időpontok mindegyike független egymástól: (*sokkal szigorúbb feltétel, mint a soros rendszernél, mivel az utolsó meghibásodási időpontig kell a függetlenségnek teljesülnie*)

   $$F_p(t) = \prod_{i=1}^{n} P(\tau_i \le t) = \prod_{i=1}^{n} F_i(t) \tag{2.4}$$

   és

   $$r_p(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - r_i(t)) \tag{2.5}$$

   Ha az egyes elemek azonos megbízhatóságúak, azaz $r_i(t) = r(t),\ \forall i,\ t$ (*nem túl szigorú feltétel, mivel a redundanciánál ez általában célszerű*)

   $$r_p(t) = 1 - (1 - r(t))^n, \quad q_p(t) = q(t)^n, \quad F_p(t) = F^n(t),$$

   $$MTFF_p = \int_0^\infty r_p(t)dt \tag{2.6}$$

2. exponenciális eloszlásra, azonos elemek esetén:

   $$r_p(t) = 1 - (1 - r(t))^n = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n \tag{2.7}$$

   $$MTFF_p = \int_0^\infty r_p(t)dt = \int_0^\infty (1 - F_p(t))dt$$

n	$\frac{MTFF_p(n)}{MTFF}$	$r(t)=0.9$		$r(t)=0.5$	
		$r_p(t)$	$q_p(t)$	$r_p(t)$	$q_p(t)$
1	1.00	0.90000	0.10000	0.50000	0.50000
2	1.50	0.99000	0.01000	0.75000	0.25000
3	1.83	0.99900	0.00100	0.87500	0.12500
4	2.08	0.99990	0.00010	0.93750	0.06250
5	2.28	0.99999	0.00001	0.96875	0.03125
10	2.93	...	...	...	...

2.2. táblázat: Egy párhuzamos melegtartalékolt (aktív tartalékolású) rendszer megbízhatósági jellemzői

Helyettesítéses integrálással:

$$\frac{dF(t)}{dt} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} = \lambda(1 - F(t))$$

$$dt = \frac{dF(t)}{\lambda(1 - F(t))}$$

amiből $y = F(t)$ helyettesítéssel

$$MTFF_p = \frac{1}{\lambda}\int_{t=0}^{\infty} \frac{1 - F(t)^n}{1 - F(t)} dF(t) = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} y^k dy = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \tag{2.8}$$

3. példa

- egyszerű párhuzamos rendszer, n elemmel 2.2. táblázat
- ábra (időfüggő és $r(t)$-függő) eredményekkel $r_p(t)$ vizsgálata
- $r_p(t)$ és $\dfrac{r_p(t)}{r(t)}$ vizsgálata

4. $\lambda_p(t)$ vizsgálata

$$\lambda_p(t) = \frac{-1}{r_p(t)}\frac{dr_p(t)}{dt} = \frac{n\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^{n-1}}{1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^n} \tag{2.9}$$

- $\lim_{t\to 0}\lambda_p(t) = 0,\ \lim_{t\to\infty}\lambda_p(t) = \lambda$
- $\lambda_p(t,n)$ függvényalakja

5. eredmények demonstrálása kétegységes rendszer esetén

6. következmény, probléma

   - $t << MTFF$-nél nagyon hatásos a $q_p(t)$-t tekintve
   - $MTFF_p$ javulása csak logaritmikus n függvényében
   - λ_p fokozatosan nő
   - a tartalék az operatív elemmel azonos valószinűséggel meghibásodhat
   - megvalósítási problémák az ideális érzékelőt, átkapcsolót és a függetlenséget tekintve

2.2.2. Hidegtartalékolt rendszer megbízhatósági jellemzői

1. a megbízhatósági paraméterek meghatározása

   - legyen adott egy rendszer n elemmel
   - az egyes elemek meghibásodási időpontja $\tau_i,\ i = 1, ..., n$
   - az egyes elemek meghibásodási időpontjának eloszlásfüggvénye $F_i(t) = P(\tau_i\ <\ t),\ i = 1, ..., n$
   - $\tau = \sum_{1}^{n} \tau_i, i = 1, ..., n$
   - kérdés: $F_h(t) = P(\tau\ <\ t)$
   - megoldás: (*feltéve, hogy az átkapcsolás ideális*)

   $$f_h(t) = f_1 * f_2 * ... * f_n \tag{2.10}$$

   A rendszerhiba bekövetkezésének ideje n növekedésével tart a normális eloszláshoz !!!

   τ relatív szórása n növekedésével csökken !!!

   $$MTFF_h = \sum_{1}^{n} MTFF_i \tag{2.11}$$

n	$\frac{MTFF_p(n)}{MTFF}$	$r(t) = 0.9$		$r(t) = 0.5$	
		$r_p(t)$	$q_p(t)$	$r_p(t)$	$q_p(t)$
1	1.0	0.900000	0.100000	0.500000	0.500000
2	2.0	0.994824	0.005176	0.846574	0.153426
3	3.0	0.999820	0.000180	0.966687	0.033313
4	4.0	0.999995	0.000005	0.994439	0.005561
5	5.0	1.000000	0.000000	0.999248	0.000752
10	10.0	1.000000	0.000000	1.000000	0.000000

2.3. táblázat: Egy párhuzamos hidegtartalékolt (passzív tartalékolású) rendszer megbízhatósági jellemzői

Ha az egyes elemek azonos megbízhatóságúak, azaz $F_i(t) = F(t),\ \forall i,\ t$ (*nem túl szigorú feltétel, mivel a redundanciánál ez általában célszerű*)

$$MTFF_h = n \quad MTFF \tag{2.12}$$

Gyakorlatban $n = 3, ..$ esetén τ eloszlása jól közelíthető az $(n\ MTFF, n\ \sigma^2_{\tau_1})$ paraméterű normális eloszlással.

2. exponenciális eloszlásra, azonos elemek esetén: **Poisson eloszlás**

$$r_h(t) = \sum_{0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{2.13}$$

$$MTFF_h = \frac{n}{\lambda} \tag{2.14}$$

3. példa

- egyszerű hidegtartalékolt rendszer, n elemmel 2.3. táblázat
- $r_h(t)$ és $\dfrac{r_h(t)}{r_p(t)}$ vizsgálata

$$\lim_{t\to\infty} \frac{r_h(t)}{r_p(t)} = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{n!}$$

4. $\lambda_h(t)$ vizsgálata

$$\lambda_h(t) = \frac{-1}{r_h(t)} \frac{dr_h(t)}{dt} = \lambda \frac{\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}} \tag{2.15}$$

- $\lim\limits_{t \to 0} \lambda_h(t) = 0$,
- $\lim\limits_{t \to \infty} \lambda_h(t) = \lambda$
- $\lambda_h(t, n)$ függvényalakja

5. eredmények demonstrálása kétegységes rendszer esetén

6. következmény, probléma

- $t << MTFF$-nél nagyon hatásos a $q_p(t)$-t tekintve
- $MTFF_h$ javulása lineáris n függvényében
- λ_h fokozatosan nő
- a tartalék nem hibásodhat meg
- megvalósítási problémák az ideális érzékelőt, átkapcsolót és a függetlenséget tekintve

2.2.3. Csökkentett terhelésű tartalék

1. a megbízhatósági paraméterek meghatározása

- legyen adott egy rendszer n *egyforma* elemmel
- az n elemből egy teljes terheléssel működik, míg a többi működőképes elem (kezdetben $n-1$) csökkentett terheléssel tartalékot képez.
- az üzemi és a tartalék elemek megbízhatósági tényezője időben állandó, λ, illetve λ_t *vegyük észre, hogy itt feltételeztük, hogy az üzembehelyezés időpontja nem befolyásolja az elemek üzembehelyezésétől számított meghibásodási idejét.*
- a csökkentett terhelésű rendszert gyakran jellemzik az $a = \lambda_t/\lambda$ aránnyal adott tartatlékolási tényezővel.
  $a = 1$ *párhuzamos rendszer,* $a = 0$ *hidegtartalékolt rendszer*
- rendszerhiba akkor következik be, amikor az összes elem (üzemi és tartalék) meghibásodott.

- jelölje $r(t) = P(\tau > t) = e^{-\lambda t}$ az üzemi, $r_{cs}(t) = P(\tau_{cs} < t) = e^{-\lambda_{cs} t}$ a (csökkentett terhelésű) tartalék elemek és $r_n(t) = P(\tau_n < t)$ az n elemű csökkentett tartalékolású rendszer hibamentes működésének valószínűségét.
  Tételezzük fel, hogy az első operatív egység a T_1 időpillanatban hibásodik meg.
  A rendszer t-ben jó, ha $T_1 > t$. Amennyiben $T_1 < t$, akkor T_1-től az addig meg nem hibásodott tartalékokból álló rendszer kezd működni hasonló módon (csökkentett terhelésű tartalékolással).

$$r_n(t \mid T_1 = h) = \begin{cases} 1 & h > t \\ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} r_{cs}^k(h)\,(1 - r_{cs}(h))^{n-k-1}\, r_k(t-h) & h < t \end{cases}$$

a feltétel eloszlása alapján:

$$r_n(t) = \int_0^\infty r_n(t \mid T_1 = h)\, f_{T_1}(h)\, dh =$$

$$\int_t^\infty 1\, f_{T_1}(h)\, dh +$$

$$\int_0^t \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} r_{cs}^k(h)\,(1 - r_{cs}(h))^{n-k-1}\, r_k(t-h)\, f_{T_1}(h)\, dh =$$

$$e^{-\lambda t} + \int_0^t \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} e^{-\lambda_{cs} hk}\,(1 - e^{-\lambda_{cs} h})^{n-k-1}\, r_k(t-h)\, \lambda e^{-\lambda h}\, dh$$

amiből $r_1(t) = e^{-\lambda t}$ alapján a hibamentes működés valószínűsége rekurzíven számítható.

2.2.4. n-ből k jó rendszer megbízhatósági jellemzői

1. a megbízhatósági paraméterek meghatározása

   - legyen adott egy rendszer n azonos elemmel
   - az egyes elemek meghibásodási időpontja $\tau_i,\ i = 1, ..., n$
   - az egyes elemek meghibásodási időpontjának eloszlásfüggvénye $F(t) = P(\tau_i < t),\ r(t) = P(\tau > t) = 1 - F(t),\ \forall i = 1, ..., n$

k/n	$\frac{MTFF_{nk}(n)}{MTFF}$	$r(t) = 0.9$		$r(t) = 0.5$	
		$r_{nk}(t)$	$q_{nk}(t)$	$r_{nk}(t)$	$q_{nk}(t)$
1/1	1.00	0.900000	0.100000	0.500000	0.500000
1/2	1.50	0.990000	0.010000	0.750000	0.250000
2/3	0.83	0.972000	0.028000	0.500000	0.500000
3/4	0.58	0.947700	0.052300	0.312500	0.687500
4/5	0.45	0.918540	0.081460	0.187500	0.812500
9/10	0.21	0.736099	0.263901	0.010742	0.989258

2.4. táblázat: Egy n-ből k (aktív) tartalékolású rendszer megbízhatósági jellemzői

- kérdés: $F_{nk}(t) = P(t, k...n)$
- kérdés: $r_{nk}(t) = 1 - F_{nk}(t)$
- megoldás: Ha a τ_i meghibásodási időpontok mindegyike független egymástól:
  (*hasonlóan szigorú, mint a párhuzamos melegtartalékolt rendszernél, mivel az (n-k)+1-ik meghibásodási időpontig kell a függetlenségnek teljesülnie*)

$$r_{nk}(t) = \sum_{i=k}^{n} P(t, k...k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} r^i(t) q^{n-i}(t) \tag{2.16}$$

$$MTFF_{nk} = \int_0^\infty r_{nk}(t)dt \tag{2.17}$$

2. exponenciális eloszlásra, azonos elemek esetén:

$$r_{nk}(t) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} e^{-i\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-i} \tag{2.18}$$

$$MTFF_{nk} = \int_0^\infty r_{nk}(t)dt = \int_0^\infty \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} e^{-i\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{n-i} dt \tag{2.19}$$

3. példa

- egyszerű n-ből k rendszer, $k = n - 1$ esetén 2.4. táblázat

4. eredmények demonstrálása kétegységes rendszer esetén
5. következmény, probléma
   - $MTFF_{nk}$ nem biztos, hogy jobb egyetlen elemnél
   - azonban $k \neq 2$ esetén $t << MTFF$-nél hatásos a $q_{nk}(t)$-t tekintve
   - λ_{nk} fokozatosan nő
   - megvalósítási problémák az ideális érzékelőt és átkapcsolót tekintve

2.3. Összetett redundáns rendszerek

1. soros-párhuzamos rendszerek
2. többségi szavazásos (majoritásos) rendszer
3. átkapcsoló tartalékolású rendszer (stand-by): aktív vagy passzív tartalékolás nem ideális átkapcsolóval

2.3.1. Soros-párhuzamos rendszerek

1. grafikus demonstráció
2. számítási módszer: fokozatos kiértékelés - összevonások sorozata
3. eredmények: illusztráció példákon (λ_1, λ_2)
   - két-két soros-párhuzamos elem rendszertartalékolással

$$r(t) = 1 - (1 - r_1(t)r_2(t))^2 = 2r_1(t)r_2(t) - r_1^2(t)r_2^2(t)$$

$$r(t) = 2e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} - e^{-2(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

$$MTFF = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} - \frac{1}{2(\lambda_1 + \lambda_2)} = \frac{3}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

   - két-két soros-párhuzamos elem elemenkénti tartalékolással

$$r(t) = (1 - (1 - r_1(t))^2)(1 - (1 - r_2(t))^2) = (2r_1(t) - r_1^2(t))(2r_2(t) - r_2^2(t))$$

$$r(t) = 4r_1(t)r_2(t) - 2r_1(t)r_2^2(t) - 2r_1^2(t)r_2(t) + r_1^2(t)r_2^2(t)$$

$$r(t) = 4e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} - 2e^{-(2\lambda_1+\lambda_2)t} - 2e^{-(\lambda_1+2\lambda_2)t} + e^{-2(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

- egy elemmel két párhuzamos sorban, végigszámolva

$$r(t) = r_1(t)(1 - (1 - r_2(t))^2) = 2r_1(t)r_2(t) - r_1(t)r_2^2(t)$$

$$r(t) = 2e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} - e^{-(\lambda_1+2\lambda_2)t}$$

$$MTFF = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1+2\lambda_2}$$

4. példa a hídelemből származó konfliktusra

2.3.2. Majoritásos rendszer megbízhatósági jellemzői

1. grafikus ábrázolás

2. számítási módszer: soros-párhuzamos modell

3. eredmények: illusztráció 3 egységes példán

$$r_m(t) = r_l(t) \sum_{i=2}^{3} \binom{3}{i} r^i(t)(1 - r(t))^{3-i} = e^{-\lambda_l t}(3e^{-2\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}) + e^{-3\lambda t})$$

$$r_m(t) = 3e^{-(\lambda_l+2\lambda)t} - 2e^{-(\lambda_l+3\lambda)t}$$

$$MTFF_m = \frac{3}{\lambda_l+2\lambda} - \frac{2}{\lambda_l+3\lambda}$$

(*MTFF csökkenésének magyarázata*)

4. kapcsolóelem jelentősége, ideális kapcsolójú rendszer
(*n-ből k típusú rendszer*)

2.3.3. Átkapcsoló tartalékolású rendszer megbízhatósági jellemzői

1. gyakori megnevezés: stand-by

2. grafikus ábrázolás

3. számítási módszer: speciális soros-párhuzamos modell
(*kapcsoló sorosan, kapcsoló mellékágban sorosan*)

4. eredmények: illusztráció 2 egységes példán

- aktív tartalékolás, kapcsoló sorosan

$$r_{sb}(t) = r_k(t)(1 - (1 - r_2(t))^2) = 2r_k t)r(t) - r_k(t)r^2(t)$$

$$r_{sb}(t) = 2e^{-(\lambda_k+\lambda)t} - e^{-(\lambda_k+2\lambda)t}$$

$$MTFF_{sb} = \frac{2}{\lambda_k + \lambda} - \frac{1}{\lambda_k + 2\lambda}$$

- passzív tartalékolás, kapcsoló mellékágban sorosan
mivel azonos, állandó hibaintenzitású elemekből álló hidegtartalékolt rendszernél a meghibásodások (amíg vannak) Poisson folyamat szerint fordulnak elő annak valószínűsége, hogy $(0, t)$-ben egy elem sem hibásodik meg $e^{-\lambda t}$ és, hogy pont egy elem hibásodik meg $\lambda t e^{-\lambda t}$.

$$r_{hk}(t) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t r_k(t)) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda_k t})$$

$$MTFF_{hk} = \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{(\lambda_k + \lambda)^2}$$

- csökkentett terhelésű tartalékolás, kapcsoló mellékágban sorosan
Tételezzük fel, hogy az operativ egység T_1 időpillanatban hibásodik meg, és hogy a tartalék meghibásodási tényezője $\lambda_{cs} < \lambda$.
A rendszer jó, ha az operatív egység még nem hibásodott meg $T_1 > t$, vagy ha már meghibásodott, de sem a kapcsoló sem az eredetileg tartalékként használt alkatrész nem romlott még el (ez utóbbi meghibásodási tényezője T_1-ben megváltozik).

$$r_{csk}(t \mid T_1 = h) = \begin{cases} 1 & h > t \\ r_{cs}(h)r(t-h)r_k(t) & h < t \end{cases}$$

a feltétel eloszlása alapján:

$$r_{csk}(t) = \int_0^\infty r_{csk}(t \mid T_1 = h) f_{T_1}(h) dh =$$

$$\int_t^\infty 1 f_{T_1}(h) dh + \int_0^t r_{cs}(h) r(t-h) r_k(t) f_{T_1}(h) dh =$$

$$e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda_{cs} h}\; e^{-\lambda(t-h)}\; e^{-\lambda_k t}\; \lambda e^{-\lambda h} dh$$

amiből az integrálok kiértékelése után

$$r_{csk}(t) = e^{-\lambda t} + \frac{\lambda}{\lambda_{cs}} e^{-(\lambda+\lambda_k)t}[1 - e^{-\lambda_{cs} t}]$$

$$MTFF_{csk} = \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda_{cs}} \left[\frac{1}{\lambda + \lambda_k} - \frac{1}{\lambda + \lambda_k + \lambda_{cs}} \right]$$

5. kérdés: többállapotú kapcsolóelem (ld. aktív tartalékolás)

2.4. Nemjavított rendszerek számítási módszerei

2.4.1. Megbízhatósági blokkdiagram

1. eddigi megbízhatósági modellek jellemzői
   - Boole-féle modell (kétállapotú elem, függetlenség)
   - soros-párhuzamos struktúrák
   - véges (megszámlálható) számú alkatrész
   - monoton nem javulhat több hibás elemmel (nincs öngyógyítás)
   - számítás a Boole-algebra szabályai szerint
   - konjunktív (normál) alak (*sum of disjoint products*) esetén az logikai kifejezés alapján a valószínűség közvetlenül számítható.
2. eddigi megbízhatósági modellek korlátai
   - kétállapotú rendszer (kiterjeszthető, ld. n-ből k, ahol tudhatjuk azt is, hogy az "éppen k" valószínűség hogy alakul)
   - javításmentesség
   - csökkentett terhelés
   - exponenciális meghibásodási idő eloszlás (valójában ez nem mindig, hisz egyes esetekben általános $r(t)$-re is ismert)

2.4.2. A teljes valószinűség tétel alkalmazása

1. feltételes valószinűségek alkalmazása: $\cup_i^n B_i = \Omega,\ B_i \cap B_j = \emptyset,\ \forall\, i,j = 1...n$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

2. a tétel alkalmazása többállapotú elemekre:
   pl. dióda két hibás állapottal, kétállapotú kapcsoló

3. a tétel alkalmazása nem soros-párhuzamos rendszerekre: hídágas ötelemű példa
4. a tétel alkalmazása nem független elemű rendszerekre:
   csak utalva rá, mivel erre nem egy hatékony megoldás

2.5. Hálózatmegbízhatóság számítási módszerek

Hálózatmegbízhatósági modell

1. az egyes elemek egy gráf egy-egy élének felelnek meg
2. kétállapotú, független elem
3. függetlenség
4. tetszés szerinti gráfstruktúrák
5. számítás gráffogalmakra alapozottan
6. rendszermegbízhatóság "közvetlenül" számítható diszjunktív normál alak,

   $$P(AB + \bar{A}B + A\bar{B}) = r_A r_B + q_A r_B + r_A q_B =$$

   vagy annak egyszerűsítésével nyert alakok (SDP - sum of disjoint products) esetén

   $$P(B + A\bar{B}) = r_B + r_A q_B$$

2.5.1. Vágatmeghatározás (*cut set*)

1. kezdő- és végpontot elszigető élek (csúcsok) halmaza
2. $\mathcal{C}_i,\ i = 1, ..., N_{sd}$: az i. vágat éleinek halmaza
3. $C_i,\ i = 1, ..., N_{sd}$: azon esemény, hogy az i. vágatban minden él meghibásodott
4. $q_k = q_k(t)$: a k. él működésképtelenségének valószinűsége
5. $q_e = q_e(s, d, t) = P(\cup_{i=1}^{N_{sd}} C_i)$
   mivel $\cup_{i=1}^{N_{sd}} C_i$ nem SDP alakú

   $$q_e = P(C_1) + P(C_2) + ... + P(C_{N_{sd}}) - P(C_i \cap C_j,\ \forall\ i, j) +$$
   $$P(C_i \cap C_j \cap C_k,\ \forall\ i, j, k) - ....$$

6. általánosítható:
   - több csomópontpárra, teljes gráfra (*összefüggőség*)
   - többállapotú élekre (*kapacitás jellegű követelménynél*)
7. közelítő számítások: (*mivel a hibás működés valószinűsége általában kicsi*)

$$q_e \simeq P(C_1) + P(C_2) + ... + P(C_4)$$

8. alkalmazás ötelemű hídágas rendszerre:

$$C_1 = (1,2),\ C_2 = (1,4,5),\ C_3 = (2,3,5),\ C_4 = (3,4)$$

$$q_e = P(C_1) + P(C_2) + ... + P(C_4) - P(C_1 \cap C_2) - P(C_1 \cap C_3) - P(C_1 \cap C_4) -$$
$$P(C_2 \cap C_3) - P(C_2 \cap C_4) - P(C_3 \cap C_4) + P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) + P(C_1 \cap C_2 \cap C_4) +$$
$$P(C_1 \cap C_3 \cap C_4) + P(C_2 \cap C_3 \cap C_4) - P(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4)$$

Mivel $P(C_i \cap C_j) = \prod_{k \in (\mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_j)} q_k,\ \forall\ i,j$:

$$q_e = q_1q_2 + q_1q_4q_5 + q_2q_3q_5 + q_3q_4 - q_1q_2q_4q_5 - q_1q_2q_3q_5 - q_1q_2q_3q_4 - q_1q_2q_3q_4q_5 -$$
$$q_1q_3q_4q_5 - q_2q_3q_4q_5 + 4q_1q_2q_3q_4q_5 - q_1q_2q_3q_4q_5$$

$$q_e = q_1q_2 + q_1q_5q_4 + q_2q_5q_3 + q_3q_4 - q_1q_2q_4q_5 - q_1q_2q_3q_5 -$$
$$q_1q_2q_3q_4 - q_1q_3q_4q_5 - q_2q_3q_4q_5 + 2q_1q_2q_3q_4q_5$$

Ha az elemek azonos megbízhatóságúak: $q_e = 2q^2 + 2q^3 - 5q^4 + 2q^5$

Közelítően: $q_e = 2q^2 + 2q^3$

2.5.2. Útmeghatározás (*tie set*)

1. kezdő- és végpontot összekötő élek (csúcsok) halmaza
2. kezdő- és végpontot elszigető élek (csúcsok) halmaza
3. $\mathcal{C}_i,\ i = 1, ..., M_{sd}$: az i. út éleinek halmaza
4. $T_i,\ i = 1, ..., M_{sd}$: azon esemény, hogy az i. úton minden él működik
5. $r_k = r_k(t)$: a k. él hibamentes működésének valószinűsége

6. $r_e = r_e(t) = P(\cup_{i=1}^{M_{sd}} T_i)$
   mivel $\cup_{i=1}^{M_{sd}} T_i$ nem SDP alakú

$$r_e = P(T_1) + P(T_2) + ... + P(T_{M_{sd}}) - P(T_i \cap T_j,\ \forall\ i,j) +$$

$$P(T_i \cap T_j \cap T_k,\ \forall\ i,j,k) - ....$$

7. nincs egyszerű általánosíthatóság több csomópontpárra, többállapotú elemre

8. közelítő számítások: (*nincs a vágatokhoz hasonló egyszerű lehetőség*)

9. alkalmazás ötelemű hídágas rendszerre:

$$T_1 = (1,3),\ T_2 = (1,4,5),\ T_3 = (2,3,5),\ T_4 = (2,4)$$

$$r_e = P(T_1) + P(T_2) + ... + P(T_4) - P(T_1 \cap T_2) - P(T_1 \cap T_3) - P(T_1 \cap T_4) -$$
$$P(T_2 \cap T_3) - P(T_2 \cap T_4) - P(T_3 \cap T_4) + P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) + P(T_1 \cap T_2 \cap T_4) +$$
$$P(T_1 \cap T_3 \cap T_4) + P(T_2 \cap T_3 \cap T_4) - P(T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4)$$

   $r_e = r_1 r_3 + r_1 r_4 r_5 + r_2 r_3 r_5 + r_2 r_4 - r_1 r_3 r_4 r_5 - r_1 r_2 r_3 r_5 - r_1 r_2 r_3 r_4 - r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 -$
   Mivel $P(T_i \cap T_j) = \prod_{k \in (\mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_j)} r_k,\ \forall\ i,j$:

$$r_1 r_2 r_4 r_5 - r_2 r_3 r_4 r_5 + 4 r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 - r_1 r_2 r_3 r_4 r_5$$

$$r_e = r_1 r_3 + r_1 r_4 r_5 + r_2 r_3 r_5 + r_2 r_4 - r_1 r_3 r_4 r_5 - r_1 r_2 r_3 r_5 - r_1 r_2 r_3 r_4 -$$

$$r_1 r_2 r_4 r_5 - r_2 r_3 r_4 r_5 + 2 r_1 r_2 r_3 r_4 r_5$$

   Ha az elemek azonos megbízhatóságúak: $r_e = 2r^2 + 2r^3 - 5r^4 + 2r^5$

2.5.3. Eseményfa meghatározás (*event tree*)

1. alapmegoldásában az n darab kétállapotú elem állapotfáját definiálja 2^n állapottal

2. a fa leveleihez működőképes vagy kieső állapotokat kell rendelni, amely állapotokat a gyökértől a levélig vezető út éleinek állapota definiál

3. r_e és q_e valószinűségeket (a megfelelő diszjunkt állapotvalószinűségeket) a gyökértől a levélig vezető élek valószinűségének szorzata határozza meg

4. az állapotok száma redukálható, ha az egyértelmű helyzetekben megszüntetjük az ágak folytatását

5. további egyszerűsítés, ha csak az egyik (r_e vagy q_e) meghatározását végezzük el (*csökkenthető a memóriaigény*)

6. az eseményfa felhasználható

   - vágatok előállítására
   - utak előállítására

7. minden esetben SDP alakú megoldást szolgáltat !!

8. alkalmazási példa ötelemű hídágas rendszerre: (*teljes (32), redukált (13), út- (7), vágatmeghatározás (6) - demonstrálása*)

9. az eseményfa kiterjeszthető

   - többállapotú (redundáns) elemekre
   - többállapotú rendszerek leírására, számítására
   - nem exponenciális eloszlású rendszerek leírására, számítására

10. adott
    kezdeti esemény mellett kritikus hiba előfordulási gyakoriság meghatározása eseményfával

    - az eseményfa csúcspontja a kezdeti hiba (egy olyan meghibásodás, amelyik kritikus hibához is vezethet)
    - az elágazások az adott kezdeti hibától a kritikus hibához vezető események bekövetkezését, illetve elmaradását írják le (megfelelő valószínűségekkel).
    - az utolsó szinten a fa levelein az adott eseménysor mellett a kritritikus hiba előfordulását/elmaradását kell megadni.
    - amennyiben a kezdeti esemény f_{kezd}, [1/év] gyakorisággal fordul elő, és a kezdeti eseményből a kritikus hiba bekövetkezésének valószínűsége p_{kr}, akkor (az adott kezdeti eseményből) a kritikus hiba előfordulásának gyakorisága

$$f_{krit} = \frac{f_{kezd}}{p_{kr}} \quad [1/\text{év}]$$

2.5.4. Kapcsolat mátrix (*connection matrix*)

1. irányított kapcsolatok (szomszédosság) mátrixalapú felírása
2. megoldási módszer
   - mátrixszorzás: speciális megoldást jelent, az összeadások unióképzésként, a szorzások metszetképzésként jelentkeznek
   - csomópont megszüntetés (implicit mátrixszorzás)
3. alkalmazási példa ötelemű hídágas rendszerre

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & A & B & 0 \\ 0 & 1 & E & C \\ 0 & E & 1 & D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   - mátrixszorzás

$$\boldsymbol{M}^2 = \begin{bmatrix} 1 & A+BE & B+AE & AC+BD \\ 0 & 1 & E & C+DE \\ 0 & E & 1 & D+CE \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^3 = \begin{bmatrix} 1 & A+BE & B+AE & AC+BD+BCE+ADE \\ 0 & 1 & E & C+DE \\ 0 & E & 1 & D+CE \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A többi hatvány már azonos $\boldsymbol{M}^3$-bel!

Az eredmény ($\boldsymbol{M}^3_{14}$) nem SDP alakú !!

   - csomópont megszüntetés
     Alapelv: $M'_{ij} = M_{ij} + (M_{ik}M_{kj})$ a megszüntetett $k \neq i, j$ csomópontra

$$\boldsymbol{M}' = \begin{bmatrix} 1 & B+AE & AC \\ 0 & 1 & D+CE \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}" = \begin{bmatrix} 1 & AC+BD+BCE+ADE \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- mindkét megoldás az utak előállítását végzi egy egyszerűbben implementálható módon.
  javasoljon vágatelőállítási eljárást hasonló mátrixos algoritmus alapján.

2.6. Hibafa analízis (*fault tree*)

1. nem topológiai, hanem küldetésorientált rendszerek biztonsági vizsgálatának eszköze

2. kétállapotú elemekkel dolgozik (Boole-modell)

3. többféle meghibásodási okot is megenged

   - primer meghibásodás (alkatrész meghibásodása saját hibája vagy gyengesége miatt)
   - szekunder meghibásodás (alkatrész meghibásodása az alkatrész nem megengedett alkalmazási körülmények következtében)
   - utasítás által okozott meghibásodás (utasítások vagy segédenergia kimaradás, miközben a működési elemek rendben vannak - pl. környezet)

2.6.1. Modellezési alapelemek (*szimbólumok*)

1. *AND*, *OR*, *EOR*, *NOT* kapu

2. *n-ből k* (szavazó) kapu

3. alapesemény, nem teljes esemény, közbenső esemény

4. transfer *IN* és *OUT*

2.6.2. Analízis lépések

1. egy meghibásodási főesemény (rendszer-meghibásodás) visszavezetése alapeseményekre (hibaokokra)

2. elsősorban kvalitatív analízisre használják
   Hányszoros "mélységű" a hiba?

3. a Boole-modellnek megfelelően végezhető kvantitatív analízis is
   kétféle numerikus módszer

- felülről-lefelé építkezés
- alulról-felfelé építkezés (*Gondot jelent a többszörös hibák (common mode failure) kezelése!*)

4. hibafák használata vágatok meghatározására, lépések
   - OR-kapu minden bemenete egy-egy új listaelemet jelent
   - AND-kapu bemenete egy közös új listaelemet jelent
   - minden listaelem egyes kapuit az előzőek szerint tovább kell alakítani
   - ha valamelyik elemnek egy másik a minimálvágata, akkor a bővebbet meg kell szüntetni
   - a végeredmény a minimálvágat
5. kiterjeszthető többállapotú elemekre
6. a többféle lehetséges főesemény lehetővé teszi a többállapotú rendszer értelmezést (*pl. főesemények kombinációja*)
7. korlátozottan lehetővé teszi a függőség figyelembevételét (*csak a pillanatnyi függőség írható le, s nem az eseményhez kötött*)

2.7. Gyakorlatok nemjavított rendszerek modellezésére, számítására

1. példa: Billinton-Allan: 5.4 példa, 111. oldal
   - megoldás soros/párhuzamos átalakítással: nem lehetséges
   - megoldás feltételes valószinűségekkel:

$$r_e = r_A r_e(A) + q_A r_e(\bar{A}) = r_A r_B + r_A q_B r_E (r_F + q_F r_C r_D) + q_A r_C r_D r_E$$

   - megoldás vágatokkal:

$$C_1 = (A, C),\ C_2 = (A, D),\ C_3 = (A, E),\ C_4 = (B, E),$$

$$C_5 = (B, F, C),\ C_6 = (B, F, D)$$

   - megoldás utakkal:

$$T_1 = (A, B),\ T_2 = (C, D, E),\ T_3 = (A, F, E)$$

- megoldás eseményfával:

$$r_e = \mathbf{P}\Big(AB + A\bar{B}CDE + A\bar{B}C\bar{D}EF + A\bar{B}\bar{C}EF + \bar{A}CDE\Big)$$

$$q_e = \mathbf{P}\Big(A\bar{B}\bar{E} + A\bar{B}C\bar{D}E\bar{F} + A\bar{B}\bar{C}E\bar{F} + \bar{A}\bar{C} + \bar{A}C\bar{D} + \bar{A}CD\bar{E}\Big)$$

- megoldás kapcsolatmátrixszal:
  - mátrixszorzás:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & A & C & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & F & B \\ 0 & 0 & 1 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^2 = \begin{bmatrix} 1 & A & C & AF+CD & AB \\ 0 & 1 & 0 & F & B+FE \\ 0 & 0 & 1 & D & DE \\ 0 & 0 & 0 & 1 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^3 = \begin{bmatrix} 1 & A & C & AF+CD & AB+AFE+CDE \\ 0 & 1 & 0 & F & B+FE \\ 0 & 0 & 1 & D & DE \\ 0 & 0 & 0 & 1 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - csomópont megszüntetés:

$$\begin{bmatrix} 1 & A & C & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & F & B \\ 0 & 0 & 1 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

    2-es csomópont megszüntetése:

$$\begin{bmatrix} 1 & C & AF & AB \\ 0 & 1 & D & 0 \\ 0 & 0 & 1 & E \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3-as csomópont megszüntetése:

$$\begin{bmatrix} 1 & AF+CD & AB \\ 0 & 1 & E \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4-es csomópont megszüntetése:

$$\begin{bmatrix} 1 & AB+AFE+CDE \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- hibafa létrehozás: "bal - jobb érkező jel" kimaradás

2. példa: Billinton-Allan: 5.11-12 példa, 140-146.oldal

   - kétféle numerikus módszer illusztrálása a példákon
   - hibafák használata vágatok meghatározására — illusztráció

3. példa: Adott egy három elemből (E_1, E_2 és E_3) álló rendszer. E_1 és E_2 párhuzamos és velük sorban E_3. $r_1(t) = pe^{-\lambda_a t} + (1-p)e^{-\lambda_b t}$, $r_2(t) = e^{-\lambda_2 t}$, $r_3(t) = e^{-\lambda_3 t}$, ahol $p = 0.5$, $\lambda_a = 100FIT$, $\lambda_b = 500FIT$, $\lambda_2 = 200FIT$ és $\lambda_3 = 100FIT$. Kérdések:

   - $r(t)$
   - MTFF
   - $\lambda_1(t)$ valamint $\lim_{t\to 0}\lambda_1(t)$, és $\lim_{t\to\infty}\lambda_1(t)$.

3. fejezet

JAVÍTOTT RENDSZEREK MEGBÍZHATÓSÁGA

3.1. Kiindulópontok

1. feloldott modellkorlátok
   - kétállapotú elem — (teljes valószinűség tétele, eseményfa)
   - függetlenség — (teljes valószinűség tétele, korlátozottan eseményfa, hibafa)
   - soros-párhuzamos struktúrák — (teljes valószinűség tétele, hálózat)
   - kétállapotú rendszer — (eseményfa, hibafa)
   - exponenciális meghibásodási idő eloszlás — (eseményfa, de több más modell is megenged általános F(t) függvényt)
2. megmaradt modellkorlátok
   - javítások figyelembevétele
   - csökkentett terhelés (valójában állapotfüggő meghibásodási tényező) lehetőségének figyelembevétele
3. fenntartás (javítás) célja
   - meghibásodás következményének elhárítása (*kiesési idő lerövidítése*)
   - meghibásodások megelőzése

4. fenntartás, felújítás figyelembevétele (modellezési kérdések)

   - fenntartás jellege
     - megelőző karbantartás — preventív (idő- vagy állapotfüggő)
     - javítás — korrektív
   - javítás feltételei
     - időfüggőség
     - állapotfüggőség (pl. kötelező kikapcsolás)
   - javítás hatása
     - részleges
     - teljes
   - beavatkozás eloszlása, időtartama
     - távolság
     - tartalékkészlet
   - redundancia és fenntartás együttes kezelése
   - általános probléma: az állapotfüggőség kezelése

5. általános modell

   - termék leírása: $X(t) = X_i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n$ egy véletlen folyamat, ahol az $X_(t)$ folyamat által felvett X_i értékek a rendszer egy-egy állapotának felelnek. A továbbiakban az egyszerűbb kezelés érdekében X_i helyett az i jelölést használjuk.
   - gondot jelent, hogy az $X(t)$ véletlen folyamatot általánosan az

     $$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{t}) = P\left\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \cdots, X(t_n) \leq x_n\right\}$$

     véges dimenziós eloszlásfüggvényekkel adhatnánk meg.
   - ezen folyamatok speciális esetét jelentik az úgynevezett Markov folyamatok
   - közülük először a diszkrét idejű Markov láncokkal (diszkrét paramétertér, diszkrét állapottér), majd a folytonos idejűekkel (folytonos paramétertér, diszkrét állapottér) foglalkozunk.

3.2. Diszkrét idejű (véges) Markov láncok

3.2.1. Markovitás és tulajdonságai

1. markovitás: (*a jövő a múlttól csak a jelenen keresztül függ*)

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) = \mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n) \tag{3.1}$$

$\forall n = 0, 1, \cdots,$ és $\forall x_k \in S, \;\; S = \{0, 1, \cdots, N\}.$

2. következmény:

$$\mathbf{P}(X_0 = x_0, \cdots, X_n = x_n) = \mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \cdots, X_0 = x_0)$$

$$\mathbf{P}(X_0 = x_0, \cdots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})$$

$$\mathbf{P}(X_{n-1} = x_{n-1} \mid X_{n-2} = x_{n-2}, \cdots, X_0 = x_0)$$

$$\mathbf{P}(X_0 = x_0, \cdots, X_{n-2} = x_{n-2}) = \cdots =$$

$$\mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})\mathbf{P}(X_{n-1} = x_{n-1} \mid X_{n-2} = x_{n-2}) \cdots$$

$$\mathbf{P}(X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0)P(X_0 = x_0)$$

3. jelölések: egylépéses átmenetvalószinűségek

$$p_{ij}^{(1)}(n) = \mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad \forall i \in S,\ \forall j \in S,\ \forall n = 0, 1, \cdots \tag{3.2}$$

$$\sum_{j \in S} p_{ij}(n) = 1 \qquad \forall i \in S,\ \forall n = 0, 1, \cdots \tag{3.3}$$

4. Chapman-Kolmogorov egyenlőség:

$$p_{ij}^{(m+n)}(l) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)}(l) p_{kj}^{(n)}(l + m) \quad \forall i \in S \tag{3.4}$$

5. a diszkrét idejű Markov láncokkal kapcsolatban tanult alapfogalmak

   - irreducibilitás: minden állapot minden állapotból elérhető (*szemrevételezés*)
   - aperiodikusság: nem periodikus (*szemrevételezés*)
   - öröklődés: irreducibilis Markov láncokra az aperiodikusság öröklődik

6. homogenitás

$$p_{ij} = p_{ij}^{(1)}(n) = \mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \qquad \forall i \in S,\ \forall j \in S\ \forall n = 0, 1, \cdot \tag{3.5}$$

7. következmény mátrixos jelöléssel:

$$P(n) = P(n-1)\mathbf{\Pi} = P(0)\mathbf{\Pi}^{(n)} = P(0)\mathbf{\Pi}^{n} \tag{3.6}$$

ahol: $P(n) = [p_0(n), p_1(n), p_2(n), \cdots, p_N(n)]$, $\quad p_i(n) = P(X_n = i)$,
$\mathbf{\Pi}^{(n)} = \left[p_{ij}^{(n)}\right] = \left[p_{ij}^{(n)}\right]$ és $\mathbf{\Pi}^{(1)} = \mathbf{\Pi}$, $\forall\ i,\ j \in S$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

8. alapkérdés: határeloszlás létezése, meghatározása

3.2.2. A határeloszlás

1. véges Markov lánc, a határeloszlás létezik, azaz a Markov-lánc stabil, ha
   - irreducibilis
   - aperiodikus
2. a határeloszlás előállítása
   - $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j > 0$, $\forall i, j$, ahol $p_j = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = j)$, $\forall j$-re
   - ekkor a $P = P\mathbf{\Pi}$, $P = [p_0, p_1, p_2, \cdots]$ egyenlőségnek a $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ feltétel mellett csak egy megoldása van, amely a határeloszlást szolgáltatja. Ha a $P^{(0)} = P$ feltétel teljesül, akkor $P^{(n)} = P$, $\forall n$-re.
3. a határeloszlás létezésének következménye
   - más felírással kifejtve a j. állapotra:

$$p_j(n) = \sum_{i\in S} p_i(n-1)p_{ij} = p_j(n-1)p_{jj} + \sum_{i\neq j} p_i(n-1)p_{ij}$$

$$p_j(n) = p_j(n-1)(1 - \sum_{k\neq j} p_{jk}) + \sum_{i\neq j} p_i(n-1)p_{ij}$$

$$p_j(n) - p_j(n-1) = \sum_{i\neq j} p_i(n-1)p_{ij} - p_j(n-1)\sum_{k\neq j} p_{jk} \tag{3.7}$$

(A kifejezés interpretálása !)

A határeloszlásra, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} p_j(n) = \lim\limits_{n\to\infty} p_j(n-1) = p_j$, $\forall j$-re

$$p_j - p_j = 0 = \sum_{i\neq j} p_i p_{ij} - p_j \sum_{k\neq j} p_{jk}$$

azaz

$$\sum_{i\neq j} p_i p_{ij} = p_j \sum_{k\neq j} p_{jk} \tag{3.8}$$

(*A kifejezés interpretálása, grafikus demonstráció !*)

- a kifejezés kiterjeszthető állapotcsoportokra is — grafikus demonstráció

$$\sum_{i\in A}(p_i \sum_{j\in\bar{A}} p_{ij}) = \sum_{j\in\bar{A}}(p_j \sum_{k\in A} p_{jk}), \quad A\subset S \tag{3.9}$$

3.2.3. Bolyongások (diszkrét idejű születési-halálozási folyamatok)

1. értelmezés:

$$p_{ij} = \begin{cases} b_i & j=i+1,\ i\geq 0 \\ d_i & j=i-1,\ i>0 \\ 1-(b_i+d_i) & j=i,\ i>0 \\ 1-b_0 & j=i,\ i=0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

2. bolyongások határeloszlása

$$p_{k-1}p_{k-1,k} + p_{k+1}p_{k+1,k} = p_k(p_{k,k-1} + p_{k,k+1}),\ k>0$$

$$p_{k-1}b_{k-1} + p_{k+1}d_{k+1} = p_k(b_k + d_k),\quad k>0$$

$$p_1 d_1 = p_0 b_0$$

amiből *(állapotcsoportos megoldásból is származtatható!)*

$$p_k d_k = p_{k-1} b_{k-1},\quad k>0 \tag{3.10}$$

Így

$$p_k = \frac{b_{k-1}}{d_k} p_{k-1} = p_0 \prod_{j=1}^{k} \frac{b_{j-1}}{d_j},\quad k>0 \tag{3.11}$$

Mivel $\sum_k p_k = p_0 + p_0 \sum_{k=1}^{N} \prod_{j=1}^{k} \frac{b_{j-1}}{d_j} = 1$,

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{N} \prod\limits_{j=1}^{k} \frac{b_{j-1}}{d_j}} \tag{3.12}$$

3.2.4. Példák

1. példa: szerviz, hibás egységek száma

Legyen adott egy szerviz, amelybe időegységenként (naponta, óránként), függetlenül a szervizben lévő egységek számától, a javítások állapotától, α valószinűséggel egy új egységet visznek javításra, míg $(1-\alpha)$ valószinűséggel nem kerül új, hibás egység a szervizbe.

Amennyiben van hibás egység a szervizben, időegységenként (függetlenül a szervizben lévő egységek számától, korábbi javítások befejezési időpontjától) β valószinűséggel egy egységet megjavítanak, míg $(1-\beta)$ valószinűséggel nem fejeződik be javítás. Legyen $\alpha = 0.3$ és $\beta = 0.4$.

Kérdések:

(a) Hosszú idő után mennyi lesz a szervizben lévő igények számának várható értéke?

(b) Mi annak valószinűsége, hogy hosszú idő után 10 hibás egységnél több lesz a szervizben?

Modell:

(a) állapottér: $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$

(b) bolyongás, *de végtelen állapottér!!!*

(c) átmenetvalószinűségek:

$$b_0 = \alpha, \quad b_k = b = \alpha(1-\beta), \forall k > 0$$

$$d_k = d = \beta(1-\alpha), \quad k > 0$$

Megoldás:

Az eredményeket a határeloszlás ismeretében állíthatjuk elő. A határeloszlás létezik, ha $b \leq d$

$$p_k = \frac{b_{k-1}}{d_k} p_{k-1} = p_0 \prod_{j=1}^{k} \frac{b_{j-1}}{d_j} = p_0 \frac{b_0 b^{k-1}}{d^k} = p_0 \frac{b_0}{b} \left(\frac{b}{d}\right)^k$$

Mivel

$$\frac{b_0}{b} = \frac{\alpha}{\alpha(1-\beta)} = \frac{1}{1-\beta} \text{ és } \frac{b}{d} = \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{b_0}{b}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{b}{d}\right)^k} = \frac{1}{1 + \frac{b_0}{b}\frac{b/d}{1-b/d}} = \frac{1-b/d}{1-b/d+b_0/d} =$$

$$\frac{d-b}{d-b+b_0} = \frac{\beta(1-\alpha)-\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)-\alpha(1-\beta)+\alpha} = \frac{\beta-\alpha}{\beta} = 1 - \frac{\alpha}{\beta}$$

és

$$p_k = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{1}{1-\beta}\left(\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}\right)^k$$

(a) A szervizben lévő igények számának várható értéke:

$$\mathbf{E}[\text{a szervízbeli hibás berendezések száma}] = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k =$$

$$p_0\frac{b_0}{b}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{b}{d}\right)^k = p_0\frac{b_0}{b}\frac{b}{d}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{b}{d}\right)^{k-1} = \cdots = p_0\frac{b_0}{d}\frac{1-b/d+b/d}{(1-b/d)^2} =$$

$$\frac{d-b}{d-b+b_0}\frac{b_0}{d}\frac{d^2}{(d-b)^2} = \frac{\alpha\beta(1-\alpha)}{\beta(\beta-\alpha)} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{0.3(1-0.3)}{0.4-0.3} = 2.1$$

(b) Annak valószinűsége, hogy 10 hibás egységnél több lesz a szervizben, ha $\alpha = 0.3$ és $\beta = 0.4$:

$$\mathbf{P}(\text{10-nél több hibás egység a szervízben}) = \sum_{k=11}^{\infty} p_k =$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{1}{1-\beta}\sum_{k=11}^{\infty}\left(\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}\right)^k = \frac{\beta-\alpha}{\beta}\frac{1}{1-\beta}\frac{\left(\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}\right)^1 1}{1-\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}} =$$

$$\frac{(\beta-\alpha)\beta(1-\alpha)}{\beta(1-\beta)(\beta-\alpha)}\left(\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}\right)^{11} = \left(\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}\right)^{10} = \left(\frac{0.3(1-0.4)}{(0.4(1-0.3)}\right)^{10} = \left(\frac{9}{14}\right)^{10}$$

2. példa: saját számítógép, jó-rossz állapot

Egy hallgató otthon működteti a számítógépét. Ha a gép egy nap működőképes, akkor a következő nap α valószinűséggel nem működik, míg ha egy nap működésképtelen, akkor a következő nap β valószinűséggel válik működőképessé.

Kérdések:

(a) Hosszú idő után mekkora lesz annak valószinűsége, hogy a számítógép egy adott időpontban működik?

(b) Mennyi ideig tart várhatóan a számítógép egy-egy működőképes illetve működésképtelen állapota?

Modell:

(a) állapottér: $S = \{0, 1\}$, kétállapotú rendszer

(b) átmenetvalószinűségek:

$$p_{01} = \alpha, \quad p_{00} = 1 - \alpha, \quad p_{10} = \beta, \quad p_{11} = 1 - \beta$$

Megoldás:

Az eredményeket a határeloszlás ismeretében állíthatjuk elő, amely határeloszlás mindig létezik, ha $0 < \alpha, \beta \leq 1$

$$p_0 = p_{00}p_0 + p_{10}p_1, \quad p_1 = p_{01}p_0 + p_{11}p_1$$

$$p_0 = (1 - \alpha)p_0 + \beta p_1 \to p_1 = \frac{\alpha}{\beta}p_0,$$

illetve

$$p_1 = \alpha p_0 + (1 - \beta)p_1 \to p_1 = \frac{\alpha}{\beta}p_0,$$

amely egyenletek azonosak.

Kihasználva azonban, hogy $p_0 + p_1 = 1$:

$$p_0 + \frac{\alpha}{\beta}p_0 = 1, \to p_0 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}, \to p_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

(a) A számítógép működésének valószinűsége egy adott időpontban:

$$\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n \in U) = p_0 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

(b) Mennyi ideig tart várhatóan a számítógép egy-egy működőképes illetve működésképtelen állapota?

3. példa: Egy hallgató vállalkozást indít valamilyen új termékkel. Eladott már három terméket, amelyeknek javításáról maga gondoskodik. A termékek egymástól függetlenül hibásodnak meg. Egy működő berendezés a következő nap α valószinűséggel nem működik, míg a működésképtelen termékekből naponta β valószinűséggel egyet megjavít vagy $1-\beta$ valószinűséggel a javítást nem tudja befejezni.

Kérdések:

(a) Mekkora a működő berendezések várható száma? (a javítás alatti berendezések várható száma)

Modell:

(a) állapottér: $S = \{0, 1, 2, 3\}$, az állapotindex a hibás egységek számát jelenti

(b) segédváltozók:

- $\eta(n)$: valószinűségi változó, amely azt adja meg, hogy egy adott nap n működő termékből a következő napra hány hibásodik meg:

$$g(n,k) = \mathbf{P}(\eta(n) = k) = \binom{n}{k}\alpha^k(1-\alpha)^{n-k}$$

- $\gamma(m)$: valószinűségi változó, amely azt adja meg, hogy egy adott nap m működésképtelen termékből a következő napra hányat sikerül megjavítani:
$h(m,k) = \mathbf{P}(\gamma(m) = k),\ \ h(m,1) = \beta,\ \ h(m,0) = 1-\beta$, ha $0 < m \leq 3$

(c) átmenetvalószinűségek:

$$p_{ij} = \begin{cases} g(3,j) & 0 \leq j \leq 3,\ i = 0 \\ h(i,1)g(3-i,0) & j = i-1,\ i > 0 \\ h(i,0)g(3-i,0) + h(i,1)g(3-i,1) & j = i,\ i > 0 \\ h(i,0)g(3-i,j-i) + h(i,1)g(3-i,j-i+1) & j \geq i,\ i > 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Megoldás:

Az eredményeket a határeloszlás ismeretében állíthatjuk elő, amely határeloszlás mindig létezik, mivel a Markov lánc véges, ha $0 < \alpha, \beta \leq 1$. Ekkor

$$\mathbf{E}[\text{a működőképes termékek várható száma}] = \sum_{i=0}^{3}(3-i)p_i =$$

$$3 - \sum_{i=0}^{3} ip_i = 3 - \mathbf{E}[\text{a hibás termékek várható száma}]$$

3.3. Folytonos idejű — véges — Markov láncok

3.3.1. Markov tulajdonság

1. markovitás folytonos idejű Markov láncokra

$$\mathbf{P}(X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n, \cdots, X(t_0) = x_0) =$$
$$\mathbf{P}(X(t_{n+1}) = x_{n+1} \mid X(t_n) = x_n), \quad t_{n+1} > t_n > \cdots > t_0$$

   $\forall n = 0, 1, \cdots$ és $\forall x_k \in S, \quad S = \{0, 1, \cdots, N\}$,
   valamint minden $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ sorozatra.

2. következmény:

$$\mathbf{P}(X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, \cdots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, X(t_n) = x_n) =$$
$$P(X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}) \cdots$$
$$P(X(t_1) = x_1 \mid X(t_0) = x_0) P(X(t_0) = x_0)$$

3. jelölések

$$p_{ij}(u, u+t) = P(X(u+t) = j \mid X(u) = i) \quad \forall i \in S, \forall j \in S \tag{3.13}$$
$$\sum_{j \in S} p_{ij}(u, u+t) = 1 \quad \forall i \in S \tag{3.14}$$

4. Chapman-Kolmogorov egyenlőség láncokra:

$$p_{ij}(u, u+t+v) = \sum_{k \in S} p_{ik}(u, u+t) p_{kj}(u+t, u+t+v) \quad \forall i \in S \tag{3.15}$$

5. homogenitás

$$p_{ij}(u, u+t) = p_{ij}(t) = P(X(u+t) = j \mid X(u) = i) \quad \forall i \in S, \forall j \in S, \forall u, t \geq 0 \tag{3.16}$$

6. mátrixos felírással:

$$P(t+u) = P(t)\mathbf{\Pi(u)},$$

   ahol:

$$P(t) = [p_0(t), p_1(t), p_2(t), \cdots], \quad p_i(t) = P(X(t) = i),$$
$$\mathbf{\Pi}(u) = [p_{ij}(u)], \quad p_{ij}(u) = P(X(t+u) = j \mid X(t) = i),$$

   $\forall\ i,\ j = 0, 1, 2, \cdots, \forall s, t \geq 0$

7. rátamátrix: $q_{ij} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{p_{ij} - \delta_{ij}}{u}$, $\quad \boldsymbol{Q} = [q_{ij}]$, $\quad \sum\limits_{j\in S} q_{ij} = 0, \forall i \in S$

8. a folytonos idejű Markov láncokra általánosított alapfogalmak

   - irreducibilitás: minden állapot minden állapotból elérhető (*szemrevételezés*)

9. alapkérdés: határeloszlás létezése, meghatározása

3.3.2. A határeloszlás

1. a határeloszlás létezése — stabilitás

   - véges Markov láncra: ha irreducibilis

2. a határeloszlás előállítása

   - $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ij}(t) = p_j > 0,\ \forall i, j$, ahol $p_j = \lim\limits_{n\to\infty} P(X(t) = j)$
   - ekkor a $P\boldsymbol{Q} = 0$, $P = [p_0, p_1, p_2, \cdots]$ egyenlőségnek a $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ feltétel mellett csak egy megoldása van, amely a határeloszlást szolgáltatja.
     Ha a $P(0) = P$ feltétel teljesül, akkor $P(t) = P$, $\forall t$-re.

3. határeloszlás létezésének következménye

   - más felírással kifejtve a j. állapotra:

     $$P_j(t+u) = \sum_{i\in S} P_i(t) p_{ij}(u) = P_j(t) p_{jj}(u) + \sum_{i\neq j} P_i(t) p_{ij}(u)$$

     Taylor sorba fejtve $p_{ij}(u)$-t:

     $$P_j(t+u) - P_j(t) = \sum_{i\neq j} P_i(t) p_{ij}(u) - P_j(t) \sum_{k\neq j} p_{jk}(u) =$$

     $$\sum_{i\neq j} P_i(t) q_{ij} u - P_j(t) \sum_{k\neq j} q_{jk} u + o(t)$$

     $$\frac{dP_j(t)}{dt} = \lim_{u\to 0} \frac{P_j(t+u) - P_j(t)}{u} = \sum_{i\neq j} P_i(t) q_{ij} - P_j(t) \sum_{k\neq j} q_{jk}$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)\boldsymbol{Q} \tag{3.17}$$

Mivel a határeloszlásra:
$\lim_{t\to\infty} P_j(t+u) = \lim_{t\to\infty} P_j(t) = p_j, \quad \forall j$-re

$$\frac{dP_j}{dt} = 0 = \sum_{i\neq j} p_i q_{ij} - p_j \sum_{k\neq j} q_{jk}$$

azaz

$$\sum_{i\neq j} p_i q_{ij} = p_j \sum_{k\neq j} q_{jk}$$

(A kifejezések interpretálása, grafikus demonstráció !)

- a kifejezés kiterjeszthető állapotcsoportokra is — grafikus demonstráció

3.3.3. Születési-halálozási folyamatok (folytonos idejű)

1. értelmezés:

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & j = i+1,\ i \geq 0 \\ \mu_i & j = i-1,\ i > 0 \\ -\lambda_i - \mu_i & j = i,\ i > 0 \\ -\lambda_0 & j = i,\ i = 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

2. folytonos születési-halálozási folyamatok határeloszlása

$$p_{k-1} q_{k-1,k} + p_{k+1} q_{k+1,k} = p_k (q_{k,k-1} + q_{k,k+1}),\ k > 0$$
$$p_{k-1}\lambda_{k-1} + p_{k+1}\mu_{k+1} = p_k(\lambda_k + \mu_k),\ \ k > 0$$
$$p_1 \mu_1 = p_0 \lambda_0$$

amiből *(állapotcsoportos felírásból is!)*

$$p_k \mu_k = p_{k-1}\lambda_{k-1}, \ \ k > 0,$$

Így

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} p_{k-1} = p_0 \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}, \ \ k > 0.$$

Mivel $\sum_k p_k = p_0 + p_0 \sum_{k=1}^{N} \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} = 1,$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}}$$

3. demonstrációs példa: kétállapotú rendszer

3.3.4. A tranziens eloszlás

1. Laplace-transzformáció:

2. Laplace-transzformáció néhány tulajdonsága:

   - Integráltulajdonság: $F^*(0) = \int_{n=0}^{\infty} f(t)dt$
   - Kezdetiérték-tétel: $\lim_{s\to\infty} F^*(s) = \lim_{t\to 0} f(t)$
   - Határérték-tétel: $\lim_{s\to 0} sF^*(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$, ha $sF^*(s)$ analitikus $Re(s) \geq 0$ esetén
   - Konvoluciós tétel: $f(t) \otimes g(t) \longrightarrow F^*(s)G^*(s)$
   - $\frac{df}{dt} \to sF^*(s) - f(0+) \qquad \int_{0+}^{\infty} f(u)du \to \frac{1}{s}F^*(s) + c$

3. a Laplace-transzformáció alkalmazása tranziens eloszlás előállítására

$$\frac{dP}{dt} = P(t)\boldsymbol{Q}$$

$$sP^*(s) - P(0) = P^*(s)\boldsymbol{Q}$$

$$P^*(s) = P(0)\left[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}\right]^{-1}$$

   illetve legyen

$$det(\boldsymbol{Y}) = det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})$$

   Ekkor a Cramer-szabály alkalmazásával (*az i. sort $P(0)$-lal helyettesítve* $\boldsymbol{Y}_i(s)$)-et kapjuk, amiből:

$$P_i(s) = \frac{det(\boldsymbol{Y}_i(s))}{det(\boldsymbol{Y}(s))} \tag{3.18}$$

4. a Laplace-transzformáció alkalmazása az egyensúlyi eloszlás előállítására

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{s\to 0} sP^*(s) = P(0) \lim_{s\to 0} s \; \left[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}\right]^{-1}$$

   illetve

$$lim_{t\to\infty} P_i(t) = lim_{s\to 0} P_i(s) = lim_{s\to 0} \frac{det(\boldsymbol{Y}_i(s))}{det(\boldsymbol{Y}(s))} \tag{3.19}$$

3.3.5. Állapotok tartásidő eloszlása

1. tekintsünk egy tetszés szerinti állapotot, amelyre $q_{ii} > 0$:
2. a markovitásból következően annak valószinűsége, hogy a rendszer az állapotot éppen az t időpillanatban hagyja el:

$$\frac{dP_i}{dt} = q_{ii} P_i(t), \quad P_i(0) = 1$$

amiből:

$$P_i(t) = P(\tau_i > t) = \mathrm{e}^{q_{ii}t}$$

és

$$E(\tau_i) = \frac{1}{-q_{ii}} = \frac{1}{\sum\limits_{j \neq i} q_{ij}}$$

mivel

$$F_{\tau_i}(t) = P(\tau_i \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{q_{ii}t} = 1 - \mathrm{e}^{-\sum\limits_{j \neq i} q_{ij} t}$$

Emlékezzünk: Az exponenciális eloszlás emlékezetmentes!

3.3.6. Kétállapotú példa a tranziens és egyensúlyi eloszlás előállítására

1. a rátamátrix:

$$\boldsymbol{Q} = [q_{ij}] = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.75 & -0.75 \end{bmatrix}$$

2. határeloszlás meghatározása

$$p_0 = -0.5p_0 + 0.75p_1 \quad p_1 = 0.5p_0 + -0.75p_1 \quad p_0 + p_1 = 1$$

$$2p_0 = 3p_1 \quad \longrightarrow \quad p_0 = 0.6, \ \ p_1 = 0.4$$

3. tranziens eloszlás

$$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} s + 0.5 & -0.5 \\ -0.75 & s + 0.75 \end{bmatrix}$$

$$det(\boldsymbol{Y}) = det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}) = s(s + 1.25)$$

Legyen $P(0) = [P_0(0) \;\; P_1(0)]$:

$$det(\boldsymbol{Y}_0(s)) = \begin{bmatrix} P_0(0) & P_1(0) \\ -0.75 & s+0.75 \end{bmatrix} = P_0(0)(s+0.75) + P_1(0)0.75$$

$$det(\boldsymbol{Y}_1(s)) = \begin{bmatrix} s+0.5 & -0.5 \\ P_0(0) & P_1(0) \end{bmatrix} = P_0(0)0.5 + P_1(0)(s+0.5)$$

$$P_0(s) = P_0(0)\frac{s+0.75}{s(s+1.25)} + P_1(0)\frac{0.75}{s(s+1.25)}$$

$$P_1(s) = P_0(0)\frac{0.5}{s(s+1.25)} + P_1(0)\frac{s+0.5}{s(s+1.25)}$$

$$P_0(t) = P_0(0)(\frac{0.75}{1.25} + \frac{0.5}{1.25}\,\mathrm{e}^{-1.25t}) + P_1(0)(\frac{0.75}{1.25} - \frac{0.75}{1.25}\,\mathrm{e}^{-1.25t}) =$$
$$0.6 + 0.4P_0(0)\,\mathrm{e}^{-1.25t} - 0.6P_1(0)\,\mathrm{e}^{-1.25t}$$

$$P_1(t) = P_0(0)(\frac{0.5}{1.25} - \frac{0.5}{1.25}\,\mathrm{e}^{-1.25t}) + P_1(0)(\frac{0.5}{1.25} + \frac{0.75}{1.25}\,\mathrm{e}^{-1.25t}) =$$
$$0.4 - 0.4P_0(0)\,\mathrm{e}^{-1.25t} + 0.6P_1(0)\,\mathrm{e}^{-1.25t}$$

Ha $P_0(0) = 1, \quad P_1(0) = 0$:

$$P_0(t) = 0.6 + 0.4\,\mathrm{e}^{-1.25t}, \qquad P_1(t) = 0.4 - 0.4\,\mathrm{e}^{-1.25t}$$

3.4. Folytonos idejű Markov láncok alkalmazása a megbízhatósági modellezésben

3.4.1. Megfeleltetések

1. a rendszer állapotainak és a Markov lánc állapotainak megfeleltetése

   $S = (0, 1, 2, \cdots, n),\; S = U \cup D,\; U \cap D = \emptyset,\; U = (0, 1, \cdots, k),\; D = (k+1, \cdots, n)$

2. a rendszer állapotcsoportjainak és a Markov lánc állapotainak megfeleltetése

$$S = (\cup_{I=1}^{K} U_I) \cup (\cup_{J=K+1}^{N} D_J),\; 1 < N \le n \qquad 0 < K < N$$

$$U = \cup_{I=1}^{K} U_I,\; U_I \cap U_L = \emptyset,\;\; I \ne L, D = \cup_{J=K+1}^{N} D_J, \quad D_J \cap D_L = \emptyset,\;\; J \ne L$$

3. a rátamátrix elemeinek kapcsolata a meghibásodási tényezővel

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{r(t)} = \lim_{u\to 0} \frac{P(X(t) \in U, X(t+u) \in D)}{u\, P(X(t) \in U)} =$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{P(X(t+u) \in D \mid X(t) \in U)}{u} = \frac{dp_{UD}(u)}{du}$$

exponenciális eloszlású $f(t)$ esetén: $\lambda(t) \triangleq \lambda \quad \forall t$

4. javítások értelmezése — exponenciális eloszlású javítási idő

- $G_n(t) = Pr(\nu_n \leq t)$: az n. javítási időszakasz hosszának *eloszlásfüggvénye*
- $g_n(t)$: az n. kiesési időszakasz hosszának *sűrűségfüggvénye,* (ha létezik)

$$g_n(t) \ = \ \frac{dG_n(t)}{dt}$$

- $\mu_n(t)$: az n. kiesési időszakasz javítási tényezője (rátája)

$$\mu_n(t) \ = \ \frac{g_n(t)}{1 - G_n(t)}$$

- ha $G_n(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\mu_n t}$: azaz a javítási időszakasz hossza exponenciális eloszlású, akkor $\mu_n(t) \triangleq \mu_n, \quad \forall t$

3.4.2. Rendszerek megbízhatósági jellemzői

1. nemjavított rendszerek megbízhatósági jellemzői

- hibamentes működés valószinűsége: (*emlékeztetés*)

$$r(t) \triangleq P(X(u) \in U \ \ \forall u < t)$$

- várható működési idők: (*emlékeztetés*)

$$MTFF \triangleq E(\tau_1)$$

- működésképtelenség valószinűsége:

$$q(t) \triangleq P(\exists u < t : X(u) \in D)$$

2. javított rendszerek megbízhatósági jellemzői — két állapotcsoport esetén (*egyszerűen általánosítható a fenti jelölésekkel*)

   - rendelkezésreállás: (dependability)

   $$d(t) \triangleq P(X(t) \in U)$$

   - készenlét: (availability)

   $$K \triangleq \lim_{t\to\infty} d(t)$$

   - várható működési idők: (*emlékeztetés*)

   $$MUT \triangleq \lim_{n\to\infty} E(\tau_n)$$

   Legyen $\gamma(t)$: v.v., a hátralévő működési idő egy modelltől független t időponttól kezdve, feltéve hogy $X(t) \in U$

   $$MTTF \triangleq \lim_{t\to\infty} E(\gamma(t) \mid X(t) \in U)$$

   - várható kiesési idők: (*emlékeztetés*)

   $$MDT \triangleq \lim_{n\to\infty} E(\nu_n)$$

   - várható ciklusidő: (jelölik $MTBF$-fel is)

   $$MCT \triangleq MUT + MDT$$

3.4.3. Rendszerek megbízhatósági jellemzőinek előállítása

1. hibamentes működés valószinűsége: (nemjavított vagy javított rendszerre)

$$r(t) = P(X(u) \in U,\ \forall u < t) = \sum_{i\in U} P_i(t), \quad q_{ji} = 0, \ i \in D, \ j \in U \qquad (3.20)$$

amiből

$$r(t) = \pounds^{-1}\{\sum_{i\in U} P_i(s)\} = \sum_{i\in U} \pounds^{-1}\{P_i(s)\}, \quad q_{ji} = 0, \ i \in D, \ j \in U \qquad (3.21)$$

Kérdés: a $P(0)$ *kezdeti eloszlás? Jellegzetesen* $P_0(0) = 1$

2. várható működési idők: (nemjavított vagy javított rendszerre)

$$MTFF = \int_{u=0}^{\infty} r(u)du = \lim_{t\to\infty} \int_{u=0}^{t} r(u)du = \tag{3.22}$$

$$= \lim_{s\to 0} R(s) = \lim_{s\to 0} \sum_{i\in U} P_i(s) = \sum_{i\in U} \lim_{s\to 0} P_i(s), \tag{3.23}$$

$q_{ji} = 0,\ \ i \in D,\ \ j \in U$. *Kérdés: a $P(0)$ kezdeti eloszlás? ld mintapéldák!*

3. működésképtelenség valószinűsége:

$$q(t) = P(\exists u < t : X(u) \in D) = \sum_{i\in D} P_i(t), \quad q_{ji} = 0,\ \ i \in D,\ \ j \in U \tag{3.24}$$

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\sum_{i\in D} P_i(s)\} = \sum_{i\in D} \mathcal{L}^{-1}\{P_i(s)\}, \quad q_{ji} = 0,\ \ i \in D,\ \ j \in U \tag{3.25}$$

4. rendelkezésreállás: (javított rendszerre)

$$d(t) = P(X(t) \in U) = \sum_{i\in U} P_i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\sum_{i\in U} P_i(s)\} = \sum_{i\in U} \mathcal{L}^{-1}\{P_i(s)\} \tag{3.26}$$

5. készenlét: (javított rendszerre)

$$K = \lim_{t\to\infty} P(X(t) \in U) = \lim_{s\to 0} s \sum_{i\in U} P_i(s) = \sum_{i\in U} p_i \tag{3.27}$$

6. MCT: az állapotcsoportra vonatkozó eredmények alkalmazása

$$MCT = \frac{1}{\sum_{j\in D}\sum_{i\in U} p_i q_{ij}} = \frac{1}{\sum_{i\in U}\sum_{j\in D} p_j q_{ji}} \tag{3.28}$$

7. MUT: az állapotcsoportra vonatkozó eredmények alkalmazása

$$MUT = K\ \ MCT = \frac{\sum_{i\in U} p_i}{\sum_{j\in D}\sum_{i\in U} p_i q_{ij}} = \frac{\sum_{i\in U} p_i}{\sum_{i\in U}\sum_{j\in D} p_j q_{ji}} \tag{3.29}$$

8. MDT: az állapotcsoportra vonatkozó eredmények alkalmazása

$$MDT = (1-K)MCT = \frac{\sum_{j\in D} p_j}{\sum_{j\in D}\sum_{i\in U} p_i q_{ij}} = \frac{\sum_{j\in D} p_j}{\sum_{i\in U}\sum_{j\in D} p_j q_{ji}} \tag{3.30}$$

9. $MTTF$: ugya az mint $MTFF$ csak a kezdeti eloszlás

$$P(0) = \{p_1/K, \ldots, p_k/K, 0, \ldots, 0\}$$

3.4.4. Mintapélda

1. kétállapotú rendszer, rátamátrix:

$$\boldsymbol{Q} = [q_{ij}] = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

$$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} s+\lambda & -\lambda \\ -\mu & s+\mu \end{bmatrix}$$

$$det(\boldsymbol{Y}) = det \begin{bmatrix} s & -\lambda \\ s & s+\mu \end{bmatrix} = s(s+\mu+\lambda)$$

2. determinánsok:

   Legyen $P(0) = [10]$:

$$det(\boldsymbol{Y}_0(s)) = det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\mu & s+\mu \end{bmatrix} = s+\mu$$

$$det(\boldsymbol{Y}_1(s)) = det \begin{bmatrix} s+\lambda & \lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \lambda$$

3. tranziens állapotvalószinűségek Laplace-transzformáltja:

$$P_0(s) = \frac{s+\mu}{s(s+\mu+\lambda)} \quad P_1(s) = \frac{\lambda}{s(s+\mu+\lambda)} \tag{3.31}$$

4. egyensúlyi állapotvalószinűségek:

$$p_0 = \frac{\mu}{\mu+\lambda} = \frac{MUT}{MCT} \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} = \frac{MDT}{MCT} \tag{3.32}$$

5. tranziens állapotvalószinűségek:

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\mathrm{e}^{-(\mu+\lambda)t} \tag{3.33}$$

$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda} - \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\mathrm{e}^{-(\mu+\lambda)t} \tag{3.34}$$

3.5. Mintapéldák markovi modellek alkalmazására

3.5.1. Kétegységes csökkentett terhelésű tartalék

1. Adott egy kétegységes csökkentett terhelésű tartalékkal rendelkező rendszer. Üzemi állapotban az egység λ míg tartalékban $\lambda_t = a\lambda$. Az egyhibás rendszert μ_1, a kéthibás rendszert μ_2 vagy μ_3 paraméterű exponenciális eloszlású javítási idővel javítják rendre a hibamentes, egyhibás illetve hibamentes állapotba. Kérdések:
   - Mekkora a rendszer készenléti tényezője?
   - Mekkora az $MTFF$, $MTTF$, MUT, MDT?
2. a négyállapotú állapotgráf
3. állapotok összevonása
4. a háromállapotú állapotgráf
5. a rátamátrix

$$\boldsymbol{Q} = [q_{ij}] = \begin{bmatrix} -\lambda(1+a) & \lambda(1+a) & 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda) & \lambda \\ \mu_3 & \mu_2 & -(\mu_2+\mu_3) \end{bmatrix}$$

6. az állapotvalószinűségek Laplace-transzformáltja

$$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} s+\lambda(1+a) & -\lambda(1+a) & 0 \\ -\mu_1 & s+\mu_1+\lambda & -\lambda \\ -\mu_3 & -\mu_2 & s+\mu_2+\mu_3 \end{bmatrix}$$

$$det(\boldsymbol{Y}) = det \begin{bmatrix} s & -\lambda(1+a) & 0 \\ s & s+\mu_1+\lambda & -\lambda \\ s & -\mu_2 & s+\mu_2+\mu_3 \end{bmatrix}$$

$$= det \begin{bmatrix} s & -\lambda(1+a) & 0 \\ 0 & s+\mu_1+\lambda(2+a) & -\lambda \\ 0 & -\mu_2+\lambda(1+a) & s+\mu 2+\mu_3 \end{bmatrix}$$

$$= sdet \begin{bmatrix} s+\mu_1+\lambda(1+a) & -\lambda \\ s+\mu_3+\lambda(1+a) & s+\mu_2+\mu_3 \end{bmatrix}$$

$$= s(s^2 + s(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\lambda(2+a)) + \mu_1(\mu_2+\mu_3)\mu_3\lambda + (\mu_2+\mu_3+\lambda)\lambda(1+a))$$

$$det(\boldsymbol{Y}_0) = det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\mu_1 & s+\mu_1+\lambda & -\lambda \\ -\mu_3 & -\mu_2 & s+\mu_2+\mu_3 \end{bmatrix}$$

$$= det\begin{bmatrix} s+\mu_1 & -\lambda \\ s+\mu_3 & s+\mu_2+\mu_3 \end{bmatrix}$$

$$= s^2 + s(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\lambda) + \mu_1(\mu_2+\mu_3) + \mu_3\lambda$$

$$det(\boldsymbol{Y}_1) = det\begin{bmatrix} s+\lambda(1+a) & -\lambda(1+a) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\mu_3 & -\mu_2 & s+\mu_2+\mu_3 \end{bmatrix}$$

$$= det\begin{bmatrix} -\lambda(1+a) & 0 \\ -\mu_2 & s+\mu_2+\mu_3 \end{bmatrix}$$

$$= s\lambda(1+a) + (\mu_2+\mu_3)\lambda(1+a)$$

$$det(\boldsymbol{Y}_2) = det\begin{bmatrix} s+\lambda(1+a) & -\lambda(1+a) & 0 \\ -\mu_1 & s+\mu_1+\lambda & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= sdet\begin{bmatrix} -\lambda(1+a) & 0 \\ s+\mu_1+\lambda & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(1+a)$$

$$P_0(s) = \frac{det(\boldsymbol{Y}_0)}{det(\boldsymbol{Y})} =$$

$$\frac{s^2 + s(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\lambda) + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_3\lambda}{s(s^2 + s(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\lambda(2+a)) + \mu_1(\mu_2+\mu_3) + \mu_3\lambda + (\mu_2+\mu_3+\lambda)\lambda(1+a))}$$

$$P_1(s) = \frac{det(\boldsymbol{Y}_1)}{det(\boldsymbol{Y})} =$$

$$\frac{s\lambda(1+a) + (\mu_2+\mu_3)\lambda(1+a)}{s(s^2 + s(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\lambda(2+a)) + \mu_1(\mu_2+\mu_3) + \mu_3\lambda + (\mu_2+\mu_3+\lambda)\lambda(1+a))}$$

$$P_2(s) = \frac{det(\boldsymbol{Y}_2)}{det(\boldsymbol{Y})} =$$

$$\frac{\lambda^2(1+a)}{s(s^2 + s(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\lambda(2+a)) + \mu_1(\mu_2+\mu_3) + \mu_3\lambda + (\mu_2+\mu_3+\lambda)\lambda(1+a))}$$

(*Az eredmény eléggé átláthatatlan*)

7. speciális eset: $\mu_2 = 0$ (*teljes felújítás*)

$$K = \lim_{s\to 0} s(P_0(s) + P_1(s)) =$$

$$\lim_{s\to 0} s \frac{s^2 + s(\mu_1 + \mu_3 + \lambda(2+a)) + \mu_1\mu_3 + \mu_3\lambda(2+a)}{s(s^2 + s(\mu_1 + \mu_3 + \lambda(2+a)) + \mu_1\mu_3 + \mu_3\lambda(2+a)) + \lambda^2(1+a)} =$$

$$\frac{\mu_3(\mu_1 + \lambda(2+a))}{\mu_3(\mu_1 + \lambda(2+a)) + \lambda^2(1+a)} = \frac{\frac{\mu_1+\lambda(2+a)}{\lambda^2(1+a)}}{\frac{\mu_1+\lambda(2+a)}{\lambda^2(1+a)} + \frac{1}{\mu_3}} = \frac{MUT}{MUT + MDT}$$

azaz mivel $MDT = \dfrac{1}{\mu_3}$

$$MUT = \frac{\mu_1 + \lambda(2+a)}{\lambda^2(1+a)}$$

$$MTFF = \lim_{s\to 0}(P_0(s) + P_1(s)) \mid_{\mu_3=0} =$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{s^2 + s(\mu_1 + \lambda(2+a))}{s(s^2 + s(\mu_1 + \lambda(2+a)) + \lambda^2(1+a)} = \frac{\mu_1 + \lambda(2+a)}{\lambda^2(1+a)} = MUT$$

8. speciális eset: $\mu_3 = 0$ (*részleges felújítás*)

$$K = \lim_{s\to 0} s(P_0(s) + P_1(s)) =$$

$$\lim_{s\to 0} s \frac{s^2 + s(\mu_1 + \mu_2 + \lambda(2+a)) + \mu_1\mu_2 + \mu_2\lambda(1+a)}{s(s^2 + s(\mu_1 + \mu_2 + \lambda(2+a)) + \mu_1\mu_2 + \mu_2\lambda(1+a) + \lambda^2(1+a)} =$$

$$\frac{\mu_2(\mu_1 + \lambda(1+a))}{\mu_2(\mu_1 + \lambda(1+a)) + \lambda^2(1+a)} = \frac{\frac{\mu_1+\lambda(1+a)}{\lambda^2(1+a)}}{\frac{\mu_1+\lambda(1+a)}{\lambda^2(1+a)} + \frac{1}{\mu_2}} = \frac{MUT}{MUT + MDT}$$

azaz mivel $MDT = \dfrac{1}{\mu_2}$

$$MUT = \frac{\mu_1 + \lambda(1+a)}{\lambda^2(1+a)}$$

$$MTFF = \lim_{s\to 0}(P_0(s) + P_1(s)) \mid_{\mu_2=0} =$$

$$\lim_{s\to 0} s \frac{s^2 + s(\mu_1 + \lambda(2+a))}{s(s^2 + s(\mu_1 + \lambda(2+a)) + \lambda^2(1+a)} = \frac{\mu_1 + \lambda(2+a)}{\lambda^2(1+a)} \neq MUT$$

(*Az eltérés magyarázata*)

9. $\mu_1 = 0$ eset vizsgálata:

$$MTFF = \frac{\lambda(2+a)}{\lambda^2(1+a)} = \frac{2+a}{\lambda(1+a)}$$

amiből a speciális eseteire:

- forrótartalék ($a = 1$):

$$MTFF = \frac{3}{2\lambda} = (1 + 1/2)\frac{1}{\lambda}$$

- hidegtartalék ($a = 0$):

$$MTFF = \frac{2}{\lambda}$$

a korábban tanultakkal összhangban lévő eredmények.

- További gondolat: Legyen $\lambda << \mu$ (pl. $\lambda = 10^{-4}$/óra, $\mu_1 = 10^{-2}$/óra). Ekkor mivel $\lambda << \mu$:

$$MTFF = \frac{\mu_1 + \lambda(2+a)}{\lambda^2(1+a)} = \frac{\mu_1}{\lambda^2(1+a)} = \frac{\mu_1}{\lambda(1+a)}\frac{1}{\lambda}$$

  ami a példa adataival még forrótartalékra is: $50\frac{1}{\lambda}$,

  Azaz a tartalékolás a javítással együtt igazán hatékony a várható működési időt tekintve!!!

3.5.2. Kétegységes rendszer az egységek két hibás állapotával

1. Adott egy kétegységes rendszer, amelyben az egyes elemek két hibás állapottal rendelkeznek. λ_z-sel a meghibásodás azonnal rendszerhibát okoz, míg λ_s-sel az egység alkalmatlan funkciójának betöltésére. Ha egy egység meghibásodása egyik jelleggel bekövetkezett, akkor a másik jellegű hiba már nem következhet be. Rendszerhiba esetén a még működő egységet kikapcsolják, s további egységhiba nem következhet be. A javítás minden állapotban teljes felújítás, μ javítási intenzitással. Kérdések:

   - A rendszer állapotgráfja?
   - A rátamátrix?

- Mekkora a rendszer készenléti tényezője?
- Mekkora az $MTFF$, $MTTF$, MUT, MDT?

2. az állapotgráf származtatása kétdimenziós állapotgráfból

3. az állapotok összevonása, felesleges állapotok elhagyása

4. a háromállapotú állapotgráf

5. a rátamátrix $\lambda = \lambda_s + \lambda_z$

$$\boldsymbol{Q} = [q_{ij}] = \begin{bmatrix} -2\lambda & 2\lambda_s & 2\lambda_z \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ \mu & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

3.5.3. Kétegységes melegtartalék két hibás állapotú átkapcsolóval

1. Adott egy kétegységes rendszer, amelyben az átkapcsoló egységnek két hibás állapota van. Az operatív egységek meghibásodási tényezője λ, a kapcsoló λ_{kz}-vel való meghibásodása azonnali rendszerhibát okoz, míg λ_{ks}-sel alkalmatlanná válik az átkapcsolásra. Ha a kapcsoló egység meghibásodása egyik jelleggel bekövetkezett, akkor a másik jellegű hiba már nem következhet be. Rendszerhiba esetén a még működő egységeket kikapcsolják, s további egységhiba nem következhet be. A javítás minden állapotban teljes felújítás, μ javítási intenzitással. Kérdések:

   - A rendszer állapotgráfja?
   - A rátamátrix?
   - Mekkora a rendszer készenléti tényezője?
   - Mekkora az $MTFF$, $MTTF$, MUT, MDT?

2. az állapotgráf származtatása kétdimenziós állapotgráfból

3. az állapotok összevonása, felesleges állapotok elhagyása

4. a négyállapotú állapotgráf

5. a rátamátrix $\lambda_k = \lambda_{ks} + \lambda_{kz}$

$$\boldsymbol{Q} = [q_{ij}] = \begin{bmatrix} -(2\lambda+\lambda_k) & 2\lambda & \lambda_{ks} & \lambda_{kz} \\ \mu & -(\mu+\lambda+\lambda_k) & \lambda_{ks} & \lambda+\lambda_{kz} \\ \mu & 0 & -(\mu+\lambda) & \lambda \\ \mu & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

3.5.4. Majoritásos rendszer

1. Adott egy háromegységes majoritásos rendszer. Az operatív egységek meghibásodási tényezője λ, a majoritás logikáé λ_l. Rendszerhiba esetén a még működő egységeket kikapcsolják, s további egységhiba nem következhet be. Minden állapotban csak egy egységet, s mindig a kritikusabb hibájút javítják, az operatív egységeket μ, a logikát μ_l javítási intenzitással, Kérdések:

   - A rendszer állapotgráfja?
   - A rátamátrix?
   - Mekkora a rendszer készenléti tényezője?
   - Mekkora az $MTFF$, $MTTF$, MUT, MDT?

2. az állapotgráf származtatása kétdimenziós állapotgráfból

3. az állapotok összevonása, felesleges állapotok elhagyása

4. a négyállapotú állapotgráf

5. a rátamátrix $\lambda_k = \lambda_{ks} + \lambda_{kz}$

$$\boldsymbol{Q} = [q_{ij}] = \begin{bmatrix} -(3\lambda + \lambda_l) & 3\lambda & 0 & \lambda_l & 0 \\ \mu & -(\mu + 2\lambda + \lambda_l) & 2\lambda & 0 & \lambda_l \\ 0 & \mu & -\mu & 0 & 0 \\ \mu_l & 0 & 0 & -\mu_l & 0 \\ 0 & \mu_l & 0 & 0 & -\mu_l \end{bmatrix}$$

3.6. Összefoglalás

3.6.1. Markovi modellek felépítése és alkalmazása (ötletek)

1. az állapottér felépítése: származtatás a szorzattérből

2. az állapotok összevonása

3. a rátamátrix ellenőrzése

   - irreducibilitás
   - minden állapotban minden működő egység figyelembevétele

4. a megbízhatósági jellemzők származtatása

   - teljes felújítású rendszer egyetlen rendszerhibás állapottal
     - $MTFF$ meghatározása (*a mátrix méretének 1-gyel csökkentése*)
     - $MUT = MTFF$
     - $K = \frac{MUT}{MUT+MDT}$
   - általános (több hibás állapotú, részleges javítású) rendszer
     - a rendszerhibás állapotokból való javítások megkülönböztetése
       ha szükséges további μ-k bevezetésével
     - a Laplace-transzformáltak meghatározása
     - a készenléti tényező levezetése a megfelelő javítások felvételével
       ha szükséges a μ-k visszahelyettesítésével
     - az időparaméterek meghatározása
       a rendszerhibából javító μ-k 0 helyettesítésével

3.6.2. Független részegységek — hálózatok

1. $r(t)$ helyett K alkalmazása

2. független egységekből álló, soros rendszer:

$$K = \prod_{i=1}^{n} K_i \tag{3.35}$$

$$MUT = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{MUT_i} \tag{3.36}$$

3. független egységekből álló, párhuzamos rendszer:

$$1 - K = \prod_{i=1}^{n} (1 - K_i) \tag{3.37}$$

$$MDT = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{MDT_i} \tag{3.38}$$

3.7. Kitekintés

1. korábbi korlátok további oldása

   - függetlenség (állapotfüggő meghibásodási és javítási tényezők) (következmény: pl. csökkentett terhelés kezelése)
   - javítások figyelembevétele (tetszés szerinti "irányú" és intenzitású exponenciális eloszlások)
   - sokállapotú rendszer (modell alapjellemző)
   - kétállapotú elem (modellezési alaplehetőség) (*Valójában mit is jelent itt az elem?*)
   - soros-párhuzamos struktúrák lehetőségének figyelembevétele (*Valójában mit is jelent itt a struktúra?*)

2. megmaradt modellkorlátok

   - exponenciális meghibásodási és javítási idő eloszlás (*általános sorbanállási modellek, PHase-type*)

3. új kérdések

   - modell generálása (*RELECT egy lehetőség, továbbá Petri hálók*)
   - modell mérete (*numerikus problémák*)
   - modell alkalmazása
     - független részegységeknél (hálózati eredmények)
     - markovi modell, ha exponenciálisak az időeloszlások
     - általánosított markovi modellek (pl. szemi-Markov, Markov-regeneratív), ha nem exponenciálisak az időeloszlások
     - teljesítőképességi problémák vizsgálata

4. Teljesítőképességi problémák vizsgálata

   - sokállapotú rendszerre válasz
   - degradáció figyelembe vehető
   - hibadetekció, javításpolitika modellezhető
   - van-e közvetlen út a teljesítőképesség kezelésére?
     - Markov-reward folyamatok, ha a tejlesítmény állapotfüggő
     - kétdimenziós folyamat, ha az igénybevétel változik

4. fejezet

FONTOSABB TOVÁBBLÉPÉSI IRÁNYOK NÉHÁNY JELLEMZŐJE

4.1. A markovi apparátus kiterjesztése

1. Problémafelvetés

- Az állapottartási időt exponenciális eloszlásúnak tételeztük fel:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0,$$

$$F^*(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda},$$

$$E[t] = \frac{1}{\lambda},$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- Nem exponenciális tartási idő esetén a rendszer nem markovi.
- Lehetőségek arra, hogy nem markovi rendszert markovi rendszer segítségével közelítsünk/oldjunk meg:
  - szemi-markov folyamat
  - Markov regeneratív folyamat
  - **phase type közelítés**

2. Exponenciális eloszlású valószínűségi változók összege

   - Kettő, 2λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összege :

$$F_e^*(s) = \left(\frac{2\lambda}{s+2\lambda}\right)^2,$$
$$f_e(t) = 4\lambda^2 t e^{-2\lambda t},$$
$$E[t] = \frac{1}{\lambda},$$
$$\sigma^2 = \frac{1}{2\lambda^2}.$$

   - r darab, $r\lambda$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összege (Erlang típusú eloszlás, E_r):

$$F_e^*(s) = \left(\frac{r\lambda}{s+r\lambda}\right)^r,$$
$$f_e(t) = \frac{r\lambda(r\lambda t)^{r-1}e^{-r\lambda t}}{(r-1)!},$$
$$E[t] = \frac{1}{\lambda},$$
$$\sigma^2 = \frac{1}{r\lambda^2}.$$

   - Relatív szórás:

$$C^2 \triangleq \frac{\sigma^2}{E^2[t]} = \frac{1}{r} \leq 1.$$

3. Exponenciális eloszlású valószínűségi változók keveréke (hiperexponenciális típusú eloszlás, H_r):

   - λ_1 és λ_2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók p valószínűség szerinti keveréke :

$$f_e(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, t \geq 0,$$
$$E[t] = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{1-p}{\lambda_2},$$

$$E[t^2] = 2\frac{p}{\lambda_1} + 2\frac{1-p}{\lambda_2},$$

$$\sigma^2 = E[t^2] - E^2[t] = \frac{p^2 + 2p}{\lambda_1^2} + \frac{(1-p)^2 + 2(1-p)}{\lambda_2^2}.$$

- r darab, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ valószínűségek szerinti keveréke :

$$f_e(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}, t \geq 0,$$

$$E[t] = \sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{\lambda_i},$$

$$E[t^2] = 2\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{\lambda_i^2}.$$

- Relatív szórás:

$$C^2 = \frac{\sigma^2}{E^2[t]} = \frac{E[t^2] - E^2[t]}{E^2[t]} = \frac{2\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{\lambda_i^2}}{\sum_{i=1}^{r} \frac{\alpha_i}{\lambda_i}} - 1 \geq 1.$$

  (Felhasználva a Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget:

$$\left(\sum_{i=1}^{r} a_i b_i\right)^2 \leq (\sum_{i=1}^{r} a_i^2)(\sum_{i=1}^{r} b_i^2),$$

  az $a_i = \sqrt{\alpha_i}, b_i = \sqrt{\alpha_i}/\lambda_i$ helyettesítéssel.)

4. Általánosítási lehetőségek

- Célunk: tetszőleges eloszlás közelítése emlékezetmentes rendszerrel, azaz exponenciális eloszlások felhasználásával.
  - az E_r és H_r struktúra kombinálása: E_r típusú eloszlások keveréke .
  - visszacsatolást is megengedünk - tetszőlegesen bonyolult struktúra
- Osztályozás
  - PH (Phase Type) eloszlásosztály: az exponenciális eloszlású valószínűségi változók tetszőleges kombinációja - bonyolult.
  - APH (Acyclic Phase Type) eloszlásosztály: a PH osztálynak az a része, amelyben csak előre mutató átmeneteket engedünk meg.

* kanonikus alak (Cumani 1982):
  Minden APH osztálybeli struktúrához található egy ilyen, azonos fokszámú alak, ami azzal eloszlásfüggvényét tekintve ekvivalens, és egyértelmű .
* közelítő módszerek

  Adott (mért vagy becsült) eloszlásfüggvényhez találjuk meg az adott állapotszámú kanonikus alak paraméterenditemize úgy, hogy az valamilyen mérték szerint legjobban közelítsen ahhoz.

  - Milyen mérték szerint?
* milyen pontosságú közelítés lehetséges?
  Tetszőlegesen pontos közelítésre van elvi lehetőség (Cumani 1982, Asmussen 1987), ennek viszont ára van: nagyon sok állapot felvétele szükséges.
  - biz. gondolata

5. Alkalmazási példda

- Két gép működik egymástól függetlenül az üzemegységben, melyek meghibásodásakor független karbantartók javítják őket.
- A gépek a dokumentációk alapján exponenciális eloszlás szerint hibásodnak meg, átlagosan 1000 h és 1200 h üzemidő után.
- Az eddigi tapasztalatokat kiátlagolva azt kapjuk, hogy az első gépet átlagosan 3 h alatt megjavították, és az adatok 3 h szórást mutatnak.
- Az eddigi tapasztalatokat kiátlagolva azt kapjuk, hogy a második gépet átlagosan 6 h alatt megjavították, és az adatok 4.2 h szórást mutatnak.
- Modellezze markovi rendszerrel az üzemegység működését!

4.2. Petri-hálók és alkalmazásuk a megbízhatóságelméletben

1. Rendszermodellezés

- egyszerű rendszerleírási lehetőség
- automatikus megoldásgenerálás a leírás alapján

- Petri (1966, PhD disszertáció) : Petri-hálók
  - konkurrencia
  - szinkronizáció

2. Definíciók

- Struktúra:
  - Petri-háló:

$$PN = \{P, T, A, M_0\},$$

    ahol
    - helyek (places):
$$P = \{p_1, p_2, \cdots, p_m\},$$
    - átmenetek (transitions):
$$T = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\},$$
    - élek (arcs):
$$A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P),$$
    - jelölés (marking):
$$M_i : P \rightarrow N, \quad i \in N,$$

      (Azt adja meg, hogy az egyes helyeken éppen hány zseton van.)
    - kezdeti jelölés: M_0, egyszerűsítés: $m_{ij} \triangleq M_i(p_j)$.
- Működés:

(a) A t átmenet engedélyezett az i jelölésben, ha minden bemenetén van zseton:
$$\forall p \in P,\ (p, t) \in A : \quad M_i(p) > 0.$$

(b) Az engedélyezett átmenetek tüzelhetnek.

(c) Tüzeléskor egy engedélyezett t átmenet levesz egy zsetont a bemeneteiről, és kirak egyet a kimeneteire:

$$\forall p \in P,\ (p, t) \in A : \quad M_{i+1}(p) = M_i(p) - 1,$$

$$\forall p \in P,\ (t, p) \in A : \quad M_{i+1}(p) = M_i(p) + 1.$$

- Példák a Petri-háló működésére, elérhetőségi fa ($R(M_0)$) generálására

  (a) Példa

  - Kettő különböző, egymástól függetlenül meghibásodó gépünk van.
  - A hibás gépeket egy szerelő javítja, aki egyszerre csak egy gépet tud javítani.
  - A szerelő a javítást nem szakítja meg, ha közben a másik gép is elromlik.
  - Rajzoljuk fel a rendszer Petri-hálóját és elérhetőségi fáját!

  (b) Példa

  - Kettő egyforma, egymástól függetlenül meghibásodó gépünk van.
  - A hibás gépeket egy szerelő javítja, aki egyszerre csak egy gépet tud javítani.
  - A szerelő a javítást mindig megszakítja, ha közben a másik gép is elromlik, és az utoljára elromlott gépet javítja meg először.
  - Rajzoljuk fel a rendszer Petri-hálóját és elérhetőségi fáját!

3. Petri-hálók kiterjesztései

- többszörös él:

  - struktúra (változás):

$$PN = \{P, T, A, M_0, W\},$$

  ahol

$$W : A \to N^+.$$

  - működés (változás):

    * A t átmenet engedélyezett az i jelölésben, ha minden bemenetén legalább annyi zseton van, amennyi az összekötő él fokszáma:

$$\forall p \in P,\ (p,t) \in A: \quad M_i(p) \geq W(p,t).$$

    * Tüzeléskor egy engedélyezett t átmenet levesz annyi zsetont a bemeneteiről, és kirak annyi zsetont a kimeneteire, amennyi a megfelelő élek fokszáma:

$$\forall p \in P,\ (p,t) \in A: \quad M_{i+1}(p) = M_i(p) - W(p,t),$$
$$\forall p \in P,\ (t,p) \in A: \quad M_{i+1}(p) = M_i(p) + W(p,t).$$

- Példa
    - p_1 zsetonjainak száma legyen a hidrogénmolekulák (H_2) száma.
    - p_2 zsetonjainak száma legyen az oxigénmolekulák (O_2) száma.
    - p_3 zsetonjainak száma legyen a vízmolekulák (H_2O) száma.
    - Rajzoljuk fel a szintézist leíró Petri-hálót.

- tiltó él:
  - struktúra (változás):

$$PN = \{P, T, A, M_0, W, A'\},$$

    ahol

$$A' \subseteq (P \times T).$$

  - működés (változás):

    A t átmenet engedélyezett az i jelölésben, ha minden bemenetén legalább annyi zseton van, amennyi az összekötő él fokszáma, valamint az átmenetbe érkező tiltó élek helyein az él fokszámánál kevesebb zseton van:

$$\begin{aligned} \forall p \in P,\ (p,t) \in A: &\quad M_i(p) \geq W(p,t), \\ \forall p \in P,\ (p,t) \in A': &\quad M_i(p) < W(p,t). \end{aligned}$$

  - Példa
    - Két egymástól függetlenül meghibásodó gépünk van, melyek közül az egyik fontosabb.
    - A hibás gépeket egy szerelő javítja, aki egyszerre csak egy gépet tud javítani.
    - A szerelő mindig a kitüntetett gépet javítja, ha az rossz.
    - Rajzoljuk fel a rendszer Petri-hálóját és elérhetőségi fáját!

4. Petri-hálókkal kapcsolatos további fogalmak

- az M_i jelölés halott, ha nincs engedélyezett átmenet:

$$\begin{aligned} \forall t \in T \ \ \exists p \in P: \ \ &(p,t) \in A,\ M_i(p) < W(p,t), \\ &\text{vagy} \\ &(p,t) \in A',\ M_i(p) \geq W(p,t). \end{aligned}$$

- biztonsági jelölések: egy helyen legfeljebb egy zseton lehet,

$$\forall i,j,\ j \geq 0,\ 0 \leq i \leq m: \quad M_j(p_i) \leq 1.$$

- konzervatív jelölések: a zsetonszám nem változik,

$$\forall j \geq 0: \quad \sum_{i=1}^{m} M_j(p_i) = C.$$

5. Időkezelés Petri-hálókban

- Időkezeléses Petri-hálók (Timed Petri Nets, TPNs)
  - struktúra (változás):

    $$PN = \{P, T, A, M_0, W, A', \Theta\},$$

    ahol

    $$\Theta = \{\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_n\}.$$

  - működés (változás):

    Az engedélyezett t_i átmenet az engedélyezés pillanatától számított Θ_i idő elteltével tüzel.

- Sztochasztikus Petri-hálók (Stochastic Petri Nets, SPNs)
  - struktúra (változás):

    $$PN = \{P, T, A, M_0, W, A', L\},$$

    ahol

    $$L(M_j) = \{l_1(M_j), l_2(M_j), \cdots, l_n(M_j)\}, \quad j \in N,$$

    és $l_i(M_j)$-k valószínűségi sűrűségfüggvények.
  - működés (változás):

    Az M_j jelölésben engedélyezett t_i átmenet az engedélyezés pillanatától számított, $l_i(M_j)$ eloszlás szerint sorsolt valószínűségi változó által adott idő elteltével tüzel.

Homogén Markov SPN

$$L(M_j) = \{\lambda_1(M_j), \lambda_2(M_j), \cdots, \lambda_n(M_j)\}, \quad j \in N.$$

Az elérhetőségi fából előállítható a rendszert leíró Markov-lánc. Ebben az M_j jelölések felelnek meg az állapotoknak, a tüzelés pedig egy állapotátmenetnek, azaz ha az M_i jelölésből az M_j jelölés a t_k átmenet tüzelésekor jöhet létre, akkor a $\boldsymbol{Q}$ rátamátrixra:

$$Q_{ij} = \lambda_k(M_i).$$

- Általánosított Sztochasztikus Petri-hálók (Stochastic Petri Nets, SPNs)
  - Az átmenetek egy része azonnali átmenet.
  - Ezek prioritást élveznek a nem azonnali átmenetekkel szemben.
  - Eltűnő és megmaradó jelölések.
  - A rendszer leírása leegyszerűsödik, míg a hozzátartozó elérhetőségi fa generálása továbbra is automatikus.

6. Rendszerek megbízhatósági modellezése Petri-hálók segítségével

   (a) A rendszer működését (struktúráját) leíró Petri-háló elkészítése.

   (b) Az átmenetekhez rendelt eloszlásfüggvények meghatározása mérés vagy modellezés útján.

   (c) A nem exponenciális vagy azonnali átmenetek eloszlásfüggvényeinek Phase Type közelítése (software: pl. EMPHT, VERPH).

   (d) Az egyes állapotvalószínűségek meghatározása (software: pl. ESP).

   (e) Származtatott paraméterek számítása.

4.3. Hozam modellezés

1. A rendszermodell

   - A rendszer minden állapotához egy hozam rátát (reward rate) rendelünk, ami a rendszer által az adott állapotban egységnyi idő alatt termelt hasznot adja meg.

- A rendszer minden állapot-átmenetéhez egy költséget rendelünk, ami az átmenet bekövetkezésekor igényelt forrásokat jelenti.
- A rendszer működését a $[0, T]$ időintervallumban vizsgáljuk, keressük a hozam és a költség mint valószínűségi változók jellemzőit. (Itt csak a várható értékeket számítjuk ki.)

2. Jelölések

- $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, állapottér,
- $\underline{r} = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, ahol r_i a x_i állapotbeli hozam ráta,
- $\underline{t} = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, ahol t_i a x_i állapotban töltött idő (természetesen $\sum_{i=1}^{n} t_i = T$),
- $\boldsymbol{C} = \{c_{ij}\}_{n\times n}$, az állapot átmenetek költségei,
- $x(t)$, ahol $x(t) \in S$ és $t \in [0, T]$, a rendszer állapota t -ben,
- $p_i(t) = \mathbf{P}(x(t) = x_i)$ annak a valószínűsége, hogy a rendszer t-ben a x_i állapotban van,
- $Y(t)$ a rendszer által a t időpontig előállított hozam,
- $B(t)$ a rendszer által a t időpontig előállított költség.

3. Normál eset

A rendszer a hozamot folyamatosan gyűjti:

$$Y(T) = \sum_{i=1}^{n} r_i t_i.$$

$$\mathbf{E}[Y(T)] = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} r_i t_i\right] = \sum_{i=1}^{n} r_i \ \mathbf{E}[t_i] = \mathbf{E}[\underline{t}] \ \underline{r}^*.$$

Legyen $I(\cdot)$ indikátor függvény, melynek értéke 1, ha argumentuma(i) igaz(ak), egyébként 0. Ezzel kifejezve t_i-t:

$$t_i = \int_0^T I(x(t) = x_i) \ dt.$$

$$\mathbf{E}[t_i] = \mathbf{E}\left[\int_0^T I(x(t) = x_i) \ dt\right] = \int_0^T \mathbf{E}[I(x(t) = x_i)] \ dt = \int_0^T p_i(t) \ dt,$$

$$\mathbf{E}[Y(T)] = \int_0^T \underline{p}(t)\ dt\ \underline{r}^*.$$

Markovi rendszer esetén, amely $\underline{p}_0$ kezdeti eloszlással, $\mathbf{\Pi}(t)$ átmenet- és $\boldsymbol{Q}$ rátamátrix-szal jellemezhető, akkor

$$\mathbf{E}[Y(T)] = \underline{p}_0 \int_0^T \mathbf{\Pi}(t)\ dt\ \underline{r}^* = \underline{p}_0 \int_0^T e^{\mathbf{Q}t}\ dt\ \underline{r}^*.$$

4. Katasztrofális meghibásodás esete

Ebben az esetben az állapotok egy része olyan, hogy ha a rendszer idelép, akkor minden addig gyűjtött hozamot elveszít, és javulásra nem képes.
Ennek megfelelően a S állapotteret két részre bontjuk, U jelenti a jó állapotokat, míg D a katasztrofálisakat. Meggondolható, hogy ez esetben

$$Y(T) = (\sum_{i:x_i\in U} r_i t_i) \cdot (\sum_{j:x_j\in U} I(x(t) = x_j)).$$

$$\mathbf{E}[Y(T)] = \mathbf{E}\left[(\sum_{i:x_i\in U} r_i t_i) \cdot (\sum_{j:x_j\in U} I(x(t) = x_j))\right] =$$

$$\sum_{i:x_i\in U} \sum_{j:x_j\in U} r_i\ \mathbf{E}[t_i\ I(x(t) = x_j)].$$

$$\mathbf{E}[t_i I(x(t) = x_j)] = \mathbf{E}\left[\int_0^T I(x(t) = x_i) I(x(t) = x_j)\ dt\right] =$$

$$\mathbf{E}\left[\int_0^T I(x(t) = x_i, x(t) = x_j)\ dt\right] = \int_0^T \mathbf{P}(x(t) = x_i, x(t) = x_j)\ dt =$$

$$\int_0^T \mathbf{P}(x(t) = x_j | x(t) = x_i)\ \mathbf{P}(x(t) = x_i)\ dt.$$

Markovi rendszer esetén

$$\mathbf{P}(x(t) = x_j | x(t) = x_i) = \{\mathbf{\Pi}(T-t)\}_{ij}, \quad \mathbf{P}(x(t) = x_i) = \{\underline{p}_0\ \mathbf{\Pi}(t)\}_i.$$

Összefoglalva:

$$\mathbf{E}[Y(T)] = \underline{p}_0 \int_0^T \mathbf{\Pi}(t)\ \boldsymbol{R}\ \mathbf{\Pi}(T-t)\ \underline{h}^*\ dt,$$

ahol $\boldsymbol{R} = diag(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ és $h_i = I(x_i \in U)$.

5. Újrakezdő eset

Ebben az esetben a rossz állapotok nem katasztrofálisak, tehát a rendszer ki tud lépni ezekből, viszont ezekben az állapotokban elveszik az addig gyűjtött hozam, és az aktuális hozam ráta is 0.
Legyen ez esetben t_l az utolsó $D \to U$ átmenet időpontja, és t_i legyen a $[t_l, T]$ intervallumban x_i állapotban töltött idő (azaz most $\sum_{i=1}^{n} t_i = T - t_l$). Ekkor hasonlóan a katasztrofális meghibásodás esetéhez:

$$Y(T) = (\sum_{i:x_i \in U} r_i t_i) \cdot (\sum_{j:x_j \in U} I(x(t) = x_j)).$$

$$\mathbf{E}[Y(T)] = \mathbf{E}\left[(\sum_{i:x_i \in U} r_i t_i) \cdot (\sum_{j:x_j \in U} I(x(t) = x_j))\right] =$$

$$\sum_{i:x_i \in U} \sum_{j:x_j \in U} r_i \; \mathbf{E}[t_i \; I(x(t) = x_j)].$$

$$\mathbf{E}[t_i I(x(t) = x_j)] = \mathbf{E}\left[\int_{t_l}^{T} I(x(t) = x_i) I(x(t) = x_j) \; dt\right] =$$

$$\mathbf{E}\left[\int_{t_l}^{T} I(x(t) = x_i, x(t) = x_j) \; dt\right] = \mathbf{E}\left[\int_{0}^{T} I(t > t_l, x(t) = x_i, x(t) = x_j) \; dt\right] =$$

$$\int_0^T \mathbf{P}(t > t_l, x(t) = x_i, x(t) = x_j) \; dt =$$

$$\int_0^T \mathbf{P}(t > t_l, x(t) = x_j | x(t) = x_i) \; \mathbf{P}(x(t) = x_i) \; dt.$$

Az $\{t > t_l, x(t) = x_j | x(t) = x_i\}$ esemény azt jelenti, hogy t-ben x_i-ben volt a rendszer, T-ben pedig x_j-ben, és a rendszer t után már nem hajt végre $D \to U$ átmenetet. Mivel T-ben a rendszer U-ban van, ez azt jelenti, hogy ekkor t után már ki sem lép a jó állapotok közül. Ez éppen a katasztrofális meghibásodás esetén követett gondolatmenet.

Ha markovi rendszert vizsgálunk, amelynek átmeneti mátrixa $\mathbf{\Pi}(t)$, ebből elkészíthetjük az ugyanilyen, katasztrofális meghibásodást leíró rendszert úgy, hogy a rossz állapotokat nyelő állapottá változtatjuk, azaz az átmeneti mátrixot úgy módosítjuk, hogy az összes $D \to U$ átmenet minden t-re 0 valószínűségű legyen.

Az így előállított átmeneti mátrixot jelöljük $\mathbf{\Pi}^K(t)$-vel. Így

$$\mathbf{P}(t > t_l, x(t) = x_j | x(t) = x_i) = \{\mathbf{\Pi}^K(T - t)\}_{ij}, \quad \mathbf{P}(x(t) = x_i) = \{\underline{p}_0 \; \mathbf{\Pi}(t)\}_i.$$

Összefoglalva:

$$\mathbf{E}[Y(T)] = \underline{p}_0 \int_0^T \mathbf{\Pi}(t)\ \boldsymbol{R}\ \mathbf{\Pi}^K(T-t)\ \underline{h}^*\ dt,$$

ahol $\boldsymbol{R} = diag(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ és $h_i = I(x_i \in U)$.

6. Várható költség meghatározása

$$\mathbf{E}[B(t+h)] = \mathbf{E}[B(t)] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i(t)\ \Pi_{ij}(h)\ c_{ij} + o(h).$$

Markovi esetben tudjuk, hogy

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Pi_{ij}(h) + o(h)}{h} = q_{ij}, \quad i \neq j,$$

így

$$\frac{d}{dt}\mathbf{E}[B(t)] = \underline{p}_0 \mathbf{\Pi}(t)\ [\boldsymbol{C} \circ \boldsymbol{Q}] \cdot \underline{1}$$

ahol $[\boldsymbol{C} \circ \boldsymbol{Q}]_{ij} = c_{ij}\ w_{ij}$, és $\underline{1}$ a csupa 1-esekből álló oszlopvektor. Ezt megoldva:

$$\mathbf{E}[B(T)] = \underline{p}_0 \int_0^T \mathbf{\Pi}(t)\ [\boldsymbol{C} \circ \boldsymbol{Q}] \cdot \underline{1}\ dt.$$

5. fejezet

FONTOSSÁG MÉRTÉKEK

5.1. Bevezető

A rendszer minden eleméhez hozzárendelünk egy bináris változót, amely meghatározza annak állapotát (feltételezve, hogy az elemek kétállapotúak): $X_i(t) = 1$ ha az i. elem a t időpontban működőképes, míg $X_i(t) = 0$, ha nem. Így az n elemű rendszer állapota leírható az $\boldsymbol{X(t)} = [X_1(t), ..., X_n(t)]$ vektor segítségével, a lehetséges állapotok száma 2^n. Hasonlóképp a rendszer egészének állapotához is hozzárendelhetünk egy bináris változót:

$$\Phi(\boldsymbol{X}(t)) = 1,$$

akkor és csak akkor, ha a rendszer működőképes (azaz $\boldsymbol{X}(t) \in U$), és

$$\Phi(\boldsymbol{X}(t)) = 0,$$

akkor és csak akkor, ha a rendszer rossz (azaz $\boldsymbol{X}(t) \in D$). $\Phi(\boldsymbol{X}(t))$ az úgynevezett *struktúra függvény*, amely a rendszer állapotait a $\{0, 1\}$ halmazra képezi le. A struktúrafüggvényt koherensnek nevezzük, ha igaz rá a következő három tulajdonság:

- $\Phi(0, 0, ..., 0) = 0$, azaz, ha a rendszer minden eleme rossz, a rendszer nem működőképes,
- $\Phi(1, 1, ..., 1) = 1$, azaz, ha a rendszer minden eleme jó, a rendszer működőképes,
- $\Phi(\boldsymbol{x}) \leq \Phi(\boldsymbol{y})$ feltéve, hogy $x_i \leq y_i, i = 1, ..., n$, ami azt jelenti, hogy valamely elem meghibásodása nem javíthat a rendszer állapotán.

Jelölje $r_i(t)$ annak valószínűségét, hogy az i. elem a t időpontban működőképes, azaz

$$r_i(t) = Pr(X_i(t) = 1),$$

az ezen elemekből alkotott vektor: $\boldsymbol{r}(t)$. Feltételezve, hogy az előzőkben definiált valószínűségek függetlenek, jelölje $g(\boldsymbol{r}(t))$ azt a függvényt, amely kapcsolatot teremt $\boldsymbol{r}(t)$ és azon valószínűség között, hogy a rendszer egésze működőképes, azaz

$$g(\boldsymbol{r}(t)) = P(\Phi(\boldsymbol{X}(t)) = 1).$$

Tisztán soros, n elemű rendszer esetén:

$$\Phi(\boldsymbol{X}(t)) = \Phi(X_1(t), ..., X_n(t)) = \bigcap_{i=1}^{n} X_i(t),$$

$$g(\boldsymbol{r}(t)) = g(r_1(t), ..., r_n(t)) = \prod_{i=1}^{n} r_i(t),$$

míg tisztán párhuzamos rendszert feltételezve:

$$\Phi(\boldsymbol{X}(t)) = \Phi(X_1(t), ..., X_n(t)) = \bigcup_{i=1}^{n} X_i(t),$$

$$g(\boldsymbol{r}(t)) = g(r_1(t), ..., r_n(t)) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - r_i(t)).$$

Természetesen a rendszer egészének állapota az esetek túlnyomó részében nem ilyen egyszerű függvénye az elemek állapotát leíró vektornak.

5.2. Struktúrális fontosság

Az egyes alkotórészek fontossága azon alapul, hogy milyen szerepet töltenek be a rendszer struktúrájában. Az i. elem struktúrális fontossága a következő képlettel definiált:

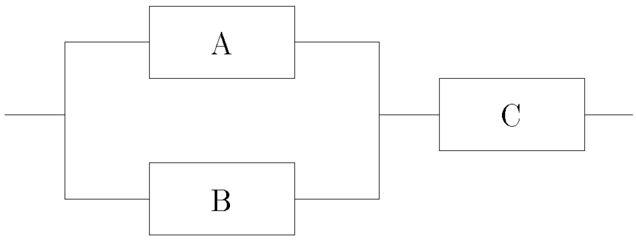
$$I_i^S = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\boldsymbol{X}, X_i \text{kötött}} (\Phi(1_i, \boldsymbol{X}) - \Phi(0_i, \boldsymbol{X})),$$

ahol

$$(0_i, \boldsymbol{X}) = (X_1, ..., X_{i-1}, 0, X_{i+1}, ..., X_n),$$

$$(1_i, \boldsymbol{X}) = (X_1, ..., X_{i-1}, 1, X_{i+1}, ..., X_n),$$

és $\Phi(\boldsymbol{X}(t))$ a rendszer struktúra függvénye. Megkötve a rendszer egy elemének állapotát a fennmaradó lehetséges állapotok száma 2^{n-1}, a képletben szereplő összegzést ezekre kell elvégezni.



5.1. ábra : Egyszerű rendszer

Az i. elem kritikus egy adott rendszerállapotban a rendszer szempontjából, ha

$$\Phi(1_i, \boldsymbol{X}) = 1,$$

és

$$\Phi(0_i, \boldsymbol{X}) = 0,$$

azaz

$$\Phi(1_i, \boldsymbol{X}) - \Phi(0_i, \boldsymbol{X}) = 1,$$

amely különbség, feltételezve, hogy a struktúra függvény koherens, 0 vagy 1. Tehát a struktúrális fontosság mérték éppen azt adja, hogy a rendszer állapotainak hányad részében kritikus az adott elem.

A 5.1.. ábrán látható egyszerű struktúrájú rendszer segítségével fogjuk szemléltetni az egyes fontosság mértékek meghatározását. A rendszert jellemző függvények:

$$\Phi(\boldsymbol{X}(t)) = \Phi(X_A(t), X_B(t), X_C(t)) = (X_A(t) \bigcup X_B(t)) \bigcap X_C(t),$$

$$g(\boldsymbol{r}(t)) = g(r_A(t), r_B(t), r_C(t)) = [1 - (1 - r_A(t))(1 - r_B(t))]\, r_C(t),$$

az egyes elemek stukturális fontossága pedig:

$$I_A^S = \frac{1}{2^2}(\Phi(1,0,0) - \Phi(0,0,0) + \Phi(1,0,1) - \Phi(0,0,1) +$$

$$\Phi(1,1,0) - \Phi(0,1,0) + \Phi(1,1,1) - \Phi(0,1,1)) = \frac{1}{4},$$

$$I_B^S = I_A^S = \frac{1}{4},$$

$$I_C^S = \frac{3}{4}.$$

Ami a várakozásainknak megfelelő eredmény, hiszen a C elem állapota, amely sorba van kötve a rendszerben, erősebben befolyásolja a rendszer egészének állapotát, mint az A és B elemek.

5.3. Birnbaum-féle fontosság mérték

A rendszer struktúra függvénye kifejezhető a következő módon:

$$\Phi(\boldsymbol{X}(t)) = X_i(t)\Phi(1_i, \boldsymbol{X}(t)) + (1 - X_i(t))\Phi(0_i, \boldsymbol{X}(t)),$$

amely egyenlőség könnyen ellenőrízhető egyszerű behelyettesítéssel:

$$\Phi(0_i, \boldsymbol{X}(t)) = (0)\Phi(1_i, \boldsymbol{X}(t)) + (1 - 0)\Phi(0_i, \boldsymbol{X}(t)),$$

$$\Phi(1_i, \boldsymbol{X}(t)) = (1)\Phi(1_i, \boldsymbol{X}(t)) + (1 - 1)\Phi(0_i, \boldsymbol{X}(t)).$$

Ha az egyenlőség mindkét oldalán várhatóérték-képzést végzünk kapjuk a következőt:

$$E(\Phi(\boldsymbol{X}(t))) = E(X_i(t))E(\Phi(1_i, \boldsymbol{X}(t))) + (1 - E(X_i(t)))E(\Phi(0_i, \boldsymbol{X}(t))), \quad (5.1)$$

ahol a szorzatok várható értéke azért egyenlő a várható értékek szorzatával, mert az egyes elemek állapotai függetlenek egymástól. Felhasználva, hogy

$$E(\Phi(\boldsymbol{X}(t))) = (0)Pr(\Phi(\boldsymbol{X}(t)) = 0) + (1)Pr(\Phi(\boldsymbol{X}(t)) = 1) = g(\boldsymbol{r}(t)),$$

$$E(X_i(t)) = (0)Pr(X_i(t) = 0) + (1)Pr(X_i(t) = 1) = r_i(t),$$

(5.1) a következő alakba írható:

$$g(\boldsymbol{r}(t)) = r_i(t)g(1_i, \boldsymbol{r}(t)) + (1 - r_i(t))g(0_i, \boldsymbol{r}(t)). \quad (5.2)$$

Az i. alapelem fontosságának Birnbaum-féle mértéke az egész rendszer működésének valószínűsége parciálisan deriválva az i. alapelem működésének valószínűsége szerint, azaz

$$I_i^B(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{\partial Pr(\Phi(\boldsymbol{X}(t)) = 1)}{\partial Pr(X_i(t) = 1)} = \frac{\partial g(\boldsymbol{r}(t))}{\partial r_i(t)}, \quad (5.3)$$

ami a (5.2) egyenlőség felhasználásával a következő egyszerű formába írható:

$$I_i^B(\boldsymbol{r}(t)) = g(1_i, \boldsymbol{r}(t)) - g(0_i, \boldsymbol{r}(t)).$$

Míg a struktúrális fontosság nem függ $\boldsymbol{r}(t)$-től, látható, hogy a Birnbaum mérték az egyes elemekhez időtől függő számot rendel hozzá. Valamely elem fontossága függ attól, hogy az adott pillanatban a többi elem milyen valószínűséggel jó vagy rossz. Például, ha egy tisztán soros rendszerben egy adott időpontban valamely elem biztosan (1 valószínűséggel) rossz, a többi elem Birnbaum-féle fontosság mértéke abban a pillanatban 0, mutatva, hogy ezen elemek állapotától függetlenül a rendszer hibás. Ugyanebben a rendszerben minden elem struktúrális fontossága azonos.

Számítsuk ki a 5.1.. ábrán látható rendszer elemeinek Birnbaum-féle fontosságát!

$$I_A^B(\boldsymbol{r}(t)) = I_A^B(r_A(t), r_B(t), r_C(t)) = g(1, r_B(t), r_C(t)) - g(0, r_B(t), r_C(t)) =$$

$$r_C(t) - (1 - (1 - r_B(t)))r_C(t) = (1 - r_B(t))r_C(t),$$

$$I_B^B(\boldsymbol{r}(t)) = (1 - r_A(t))r_C(t),$$

$$I_C^B(\boldsymbol{r}(t)) = 1 - (1 - r_A(t))(1 - r_B(t)).$$

5.4. Kritikusság mérték

Valamely elem Birnbaum-féle fontossága t időpontban nem függ attól, hogy az elem az adott pillanatban milyen valószínűséggel hibás. A következőkben bevezetésre kerülő két mérték ezt a hiányosságot pótolja. Az első ezek közül az adott elem valamint a rendszer működőképességének, míg a második ezek működésképtelenségének valószínűségét használja (erre utal a felső indexben szereplő R illetve Q betű, ezek után a kétféle kritikusság mérték megkülönböztetése érdekében R-kritikusságról, illetve Q-kritikusságról fogunk beszélni).

Az i. elem kétféle kritikusság mértéke:

$$I_i^{CR}(\boldsymbol{r}(t)) = I_i^B(\boldsymbol{r}(t))\frac{r_i(t)}{g(\boldsymbol{r}(t))} = \frac{(g(1_i, \boldsymbol{r}(t)) - g(0_i, \boldsymbol{r}(t)))r_i(t)}{g(\boldsymbol{r}(t))},$$

$$I_i^{CQ}(\boldsymbol{r}(t)) = I_i^B(\boldsymbol{r}(t))\frac{q_i(t)}{1 - g(\boldsymbol{r}(t))} = I_i^B(\boldsymbol{r}(t))\frac{1 - r_i(t)}{1 - g(\boldsymbol{r}(t))} =$$

$$\frac{(g(1_i, \boldsymbol{r}(t)) - g(0_i, \boldsymbol{r}(t)))(1 - r_i(t))}{1 - g(\boldsymbol{r}(t))},$$

ahol $q_i(t)$ jelöli annak a valószínűségét, hogy az i. elem nem működőképes a t időpontban (azaz $q_i(t) = 1 - r_i(t)$).

Példánk esetében az elemek R-kritikussága:

$$I_A^{CR}(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{[g(1, r_B(t), r_C(t)) - g(0, r_B(t), r_C(t))]\, r_A(t)}{g(r_A(t), r_B(t), r_C(t))} =$$

$$\frac{(1 - r_B(t))r_A(t)r_C(t)}{(1 - (1 - r_A(t))(1 - r_B(t)))r_C(t)} = \frac{(1 - r_B(t))r_A(t)}{1 - (1 - r_A(t))(1 - r_B(t))},$$

$$I_B^{CR}(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{(1-r_A(t))r_B(t)}{1-(1-r_A(t))(1-r_B(t))},$$

$$I_C^{CR}(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{(1-(1-r_A(t))(1-r_B(t)))r_C(t)}{(1-(1-r_A(t))(1-r_B(t)))r_C(t)} = 1.$$

Amelyből látszik, hogy a C elem R-kritikussága független az időtől. Az R-kritikusság mérték értéke 1 minden olyan elemre, amelynek meghibásodása feltétélenül a rendszer egészének működésképtelenségéhez vezet.

A rendszer másik két elemén bemutatható, hogy R-kritikusságuk mértéke hogyan változik annak függvényében, hogy az elemek maguk mennyire megbízhatóan működnek. Feltéve, hogy

$$r_A(t) = 0.5,$$

$$r_B(t) = 0.9,$$

az A és B elemek kritikussága:

$$I_A^{CR}(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{9}{11},$$

$$I_B^{CR}(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{1}{11}.$$

Ha valamely elem nagy megbízhatóságú, akkor ennek R-kritikusság mértéke kisebb lesz, mint a rendszer struktúrájában azonos szerepet betöltő kisebb megbízhatóságú társáé. Az elemek ilyenfajta megkülönböztetése azért is jogos, mert általában igaz az, hogy nagy megbízhatóságú elemet jobbá tenni költségesebb feladat, mint a kis megbízhatóságú elemek javítása.

A példa elemeinek Q-kritikussága:

$$I_A^{CQ}(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{[g(1, r_B(t), r_C(t)) - g(0, r_B(t), r_C(t))]\, q_A(t)}{1-g(r_A(t), r_B(t), r_C(t))} =$$

$$\frac{(1-r_B(t))r_C(t)(1-r_A(t))}{1-(1-(1-r_A(t))(1-r_B(t)))r_C(t)},$$

$$I_B^{CQ}(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{(1-r_A(t))r_C(t)(1-r_B(t))}{1-(1-(1-r_A(t))(1-r_B(t)))r_C(t)},$$

$$I_C^{CQ}(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{(1-(1-r_A(t))(1-r_B(t)))(1-r_C(t))}{1-(1-(1-r_A(t))(1-r_B(t)))r_C(t)}.$$

Bármilyen legyen is az A és B elemek megbízhatósága, az előzőek szerint Q-kritikusságuk mértéke azonos. Ez a fajta mérték az egymással párhuzamosan elhelyezett elemekre nem ad megfelelő információt. Viszont ebben az esetben több információt kapunk a rendszer sorosan elhelyezett elemeiről, példánk esetében a C elemről. Feltéve, hogy a C elem 1 valószínűséggel jó, Q-kritikusságának mértéke 0 lesz. Lássunk két további példát! Feltéve, hogy

$$r_A(t) = r_B(t) = 0.9, r_C(t) = 0.5,$$

az elemek Q-kritikussága:

$$I_A^{CQ}(\boldsymbol{r}(t)) = I_B^{CQ}(\boldsymbol{r}(t)) = 0.01, I_C^{CQ}(\boldsymbol{r}(t)) = 0.98.$$

Ha a C elem nagyobb megbízhatóságú, legyen például

$$r_A(t) = r_B(t) = 0.9, r_C(t) = 0.9,$$

akkor

$$I_A^{CQ}(\boldsymbol{r}(t)) = I_B^{CQ}(\boldsymbol{r}(t)) = 0.08, I_C^{CQ}(\boldsymbol{r}(t)) = 0.91.$$

Amely eredmények azt mutatják, hogy annak ellenére, hogy a második esetben C megbízhatósága jobb, mégis még mindig ez az elem lesz nagy valószínűséggel felelős az előforduló hibákért.

5.5. Vesely-Fussel-féle fontosság mérték

Ezen mérték definiálásához ismernünk kell a minimális vágat fogalmát. A vágat a rendszer elemeinek olyan csoportja, amely minden elemének meghibásodása esetén a teljes rendszer meghibásodását okozza. A minimális vágat rendszer elemeinek egy olyan halmazát jelenti, amely nem csökkenthető oly módon, hogy a vágat tulajdonság megmaradjon.

Jelölje $\mathcal{C}_j$ a rendszer j. minimális vágatának elemeit tartalmazó halmazt, és $\mathcal{V}$ a minimálsi vágatok halmazát. Legyen

$$\Phi_i(\boldsymbol{X}(t)) = \bigcap_{j\in\mathcal{V}, i\in\mathcal{C}_j} \bigcup_{k\in\mathcal{C}_j} X_k(t),$$

és így $\Phi_i(\boldsymbol{X}(t)) = 1$, ha nincs olyan vágat, amely tartalmazza az i. elemet és minden tagja hibás. Valamint $\Phi_i(\boldsymbol{X}(t)) = 0$, ha van az i. elemet tartalmazó teljesen hibás vágat. Legyen továbbá

$$g_i(\boldsymbol{r}(t)) = Pr(\Phi_i(\boldsymbol{X}(t)) = 1).$$

A Vesely-Fussel-féle fontosság mérték az előzőek felhasználásával a következő:

$$I_i^{VF} = \frac{1 - g_i(\boldsymbol{r}(t))}{1 - g(\boldsymbol{r}(t))},$$

amely hányados számlálójában az a valószínűség áll, hogy valamely az i. elemet tartalmazó vágat minden tagja működésképtelen, nevezőjében annak a valószínűsége, hogy a rendszer egésze hibás.

Egyszerű példánk esetében a minimális vágatok az $\{A, B\}$, $\{C\}$ halmazok. Az elemek Vesely-Fussel fontossága:

$$I_A^{VF}(t) = \frac{1 - g_A(\boldsymbol{r}(t))}{1 - g(\boldsymbol{r}(t))} = \frac{(1 - r_A(t))(1 - r_B(t))}{1 - (1 - (1 - r_A(t))(1 - r_B(t)))r_C(t)},$$

$$I_B^{VF}(t) = I_A^{VF}(t),$$

$$I_C^{VF}(t) = \frac{1 - g_C(\boldsymbol{r}(t))}{1 - g(\boldsymbol{r}(t))} = \frac{(1 - r_C(t))}{1 - (1 - (1 - r_A(t))(1 - r_B(t)))r_C(t)}.$$

A Vesely-Fussel-féle mérték az A és B elemekhez ugyanazt a számot rendeli hozzá. Általában is elmondható, hogy ez a mérték két olyan elemnek, melyek ugyanazokban a minimális vágatokban szerepelnek ugyanazt a fontosságot tulajdonítja, függetlenül az elemek megbízhatóságától.

5.6. Barlow-Proschan-féle fontosság mérték

Annak a valószínűsége, hogy az i. elem meghibásodik és a rendszer egészének hibáját okozza a $[t, t + \Delta t]$ időintervallumban

$$[(1 - g(0_i, \boldsymbol{r}(t + \Delta t)) - (1 - g(1_i, \boldsymbol{r}(t))]\,[(1 - r_i(t + \Delta t)) - (1 - r_i(t))]\,,$$

amely kifejezés első szögletes zárójelei közti különbség annak a valószínűsége, hogy feltételezve, hogy az i. elem jó az intervallum elején és rossz a végén, a rendszer az adott intervallumban válik működésképtelenné. A második szögletes zárójelben álló kifejezés pedig éppen az a valószínűség, hogy az i. elem az intervallumban elromlik. Az $(1 - r_i(t))$ függvényt a $q_i(t)$ függvénnyel helyettesítve, és differenciát használva a kifejezés a következő alakba írható:

$$[g(1_i, \boldsymbol{r}(t)) - g(0_i, \boldsymbol{r}(t))]\, dq_i(t),$$

amit a $[0, u]$ intervallumon integrálva megkapjuk annak valószínűségét, hogy a rendszer meghibásodott az intervallumban és a hibát az i. elem okozta:

$$\int_0^u [g(1_i, \boldsymbol{r}(t)) - g(0_i, \boldsymbol{r}(t))]\, dq_i(t).$$

A rendszer egyes elemeinek Barlow-Proschan-féle fontosság mértéke az előzőek segítségével a következőképp definiált:

$$I_i^{BP}(u) = \frac{\displaystyle\int_0^u [g(1_i, \boldsymbol{r}(t)) - g(0_i, \boldsymbol{r}(t))]\, dq_i(t)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \int_0^u [g(1_j, \boldsymbol{r}(t)) - g(0_j, \boldsymbol{r}(t))]\, dq_j(t)},$$

ahol n a rendszer elemeinek száma. A nevezőben az összegzés azt a valószínűséget adja, hogy a rendszer az adott időpontig meghibásodott, azaz

$$I_i^{BP}(u) = \frac{\displaystyle\int_0^u [g(1_i, \boldsymbol{r}(t)) - g(0_i, \boldsymbol{r}(t))]\, dq_i(t)}{1 - g(\boldsymbol{r}(t))}.$$

Legyen a példaként használt rendszer egyes elemeinek működőképességének valószínűsége valamely időpontban

$$r_A(t) = e^{-\lambda_A t},$$

$$r_B(t) = e^{-\lambda_B t},$$

$$r_C(t) = e^{-\lambda_C t},$$

azaz az elemek meghibásodási ideje exponenciális eloszlású különböző paraméterekkel. Az elemek Barlow-Proschan-féle fontossága ekkor a következő

$$I_A^{BP}(u) = \frac{\displaystyle\int_{t=0}^u e^{-\lambda_C t}(1 - e^{-\lambda_B t})\lambda_A e^{-\lambda_A} dt}{1 - g(\boldsymbol{r}(t))} =$$

$$\frac{\lambda_A \left[\frac{1-e^{-(\lambda_A+\lambda_C)t}}{\lambda_A+\lambda_C} - \frac{1-e^{-(\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C)t}}{\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C}\right]}{1 - \left[1 - (1 - e^{-\lambda_A t})(1 - e^{-\lambda_B t})\right] e^{-\lambda_C t}},$$

$$I_B^{BP}(u) = \frac{\displaystyle\int_{t=0}^u e^{-\lambda_C t}(1 - e^{-\lambda_A t})\lambda_B e^{-\lambda_B} dt}{1 - g(\boldsymbol{r}(t))} =$$

$$\frac{\lambda_B \left[\frac{1-e^{-(\lambda_B+\lambda_C)t}}{\lambda_B+\lambda_C} - \frac{1-e^{-(\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C)t}}{\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C}\right]}{1 - \left[1 - (1 - e^{-\lambda_A t})(1 - e^{-\lambda_B t})\right] e^{-\lambda_C t}},$$

$$I_C^{BP}(u) = \frac{\displaystyle\int_{t=0}^u (e^{-\lambda_A t} + e^{-\lambda_B t} - e^{-(\lambda_A+\lambda_B)t})\lambda_C e^{-\lambda_C} dt}{1 - g(\boldsymbol{r}(t))} =$$

$$\frac{\lambda_C \left[\frac{1-e^{-(\lambda_A+\lambda_C)t}}{\lambda_A+\lambda_C} + \frac{1-e^{-(\lambda_B+\lambda_C)t}}{\lambda_B+\lambda_C} - \frac{1-e^{-(\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C)t}}{\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C}\right]}{1 - \left[1-(1-e^{-\lambda_A t})(1-e^{-\lambda_B t})\right] e^{-\lambda_C t}},$$

Legyen $\lambda_A = 1, \lambda_B = 2, \lambda_C = 1$, ezeket behelyettesítve:

$$I_A^{BP}(u) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-4u} - \frac{1}{2}e^{-2u}}{1 + e^{-4u} - e^{-3u} - e^{-2u}},$$

$$I_B^{BP}(u) = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}e^{-4u} - \frac{2}{3}e^{-3u}}{1 + e^{-4u} - e^{-3u} - e^{-2u}},$$

$$I_C^{BP}(u) = \frac{\frac{7}{12} + \frac{1}{4}e^{-4u} - \frac{1}{3}e^{-3u} - \frac{1}{2}e^{-2u}}{1 + e^{-4u} - e^{-3u} - e^{-2u}},$$

Az egyes elemek Barlow-Proschan-féle fontossága a $t = 1$ időpontban:

$$I_A^{BP}(1) = 0.224331,$$

$$I_B^{BP}(1) = 0.171188,$$

$$I_C^{BP}(1) = 0.60448,$$

amely eredmény megadja, hogy feltételezve, hogy a rendszer rossz az adott időpontban, annak valószínűsége, hogy az A elem okozta meghibásodást 0.224331.

A Barlow-Proschan-féle fontosság végtelenben vett határértéke megadja, hogy melyik elem mekkora valószínűséggel okozza a rendszer meghibásodását:

$$I_A^{BP}(\infty) = \frac{1}{4},$$

$$I_B^{BP}(\infty) = \frac{1}{6},$$

$$I_C^{BP}(\infty) = \frac{7}{12}.$$

Az eredmények mutatják, hogy a BP-féle fontosság mérték megtévesztő lehet. Példánk esetében az A és B elemek a rendszer struktúrájában azonos szerepet játszanak, az A elem megbízhatósága nagyobb, mégis a B elem fontossága kisebb. Ennek oka az, hogy ezen két elem közül az okozza nagyobb valószínűséggel a rendszer meghibásodását, amelyik később romlik el, és a nagyobb megbízhatóságú A elem várhatóan később hibásodik meg, mint a B elem.