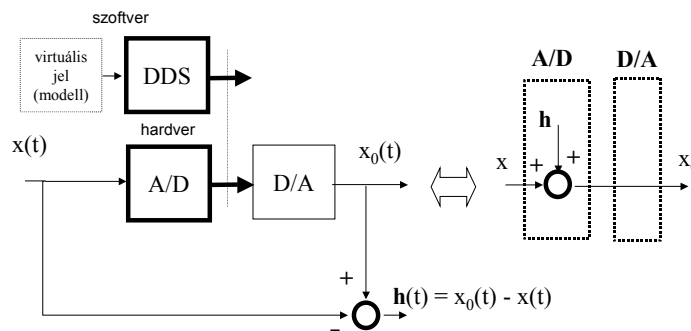


## Kvantálási (kerekítési) hiba

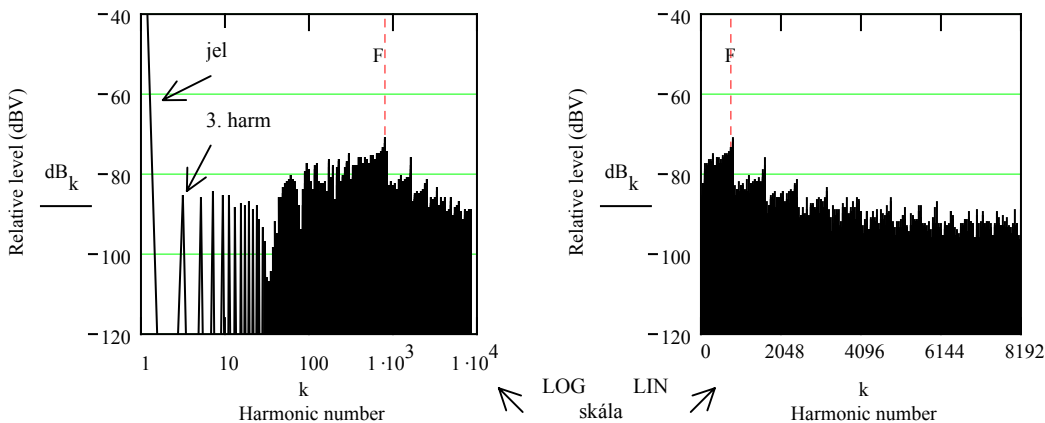
A kvantálás **nemlineáris, determinisztikus** művelet. Hatása *additív* hiba forrásként vehető számításba; a hiba *aktuális* értéke azonban ismeretlen, a bemenet függvénye



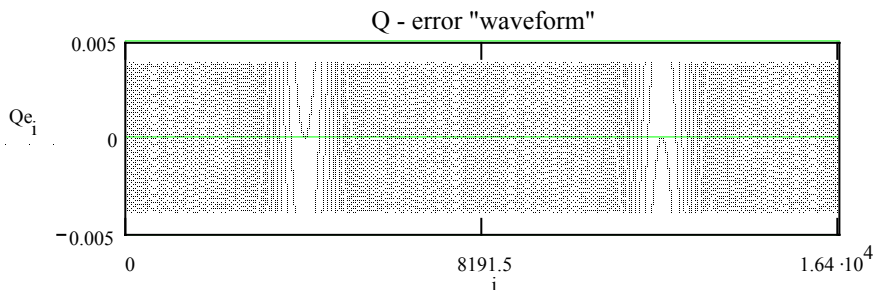
DDS: numerikus jelszintézis  
(direct digital synthesis)

**Szinuszos jel** bemenetre egy nemlinearitás felharmónikusokat: torzítást (**spurious components**) generál. A kerekítés: *round()* művelet páratlan harmónikusokat hoz létre

Példa: amplitúdóra ( $X_{FS}/2$  - re) normált, diszkrét-idejű szinus:  $\sin(2\pi \cdot (L/S) \cdot i)$ , ahol  $i$  = idő index,  $L = 1$  és  $S = 2^{14}$  (jelentős túlmintavételezés - a hasonmás-hatás csökkentésére!!); a kvantálás felbontása  $n = 8$  bit; a max. spur harmónikus száma:  $F \approx 2^n \cdot \pi$ , relatív szintje  $\approx -9 \cdot n + 6$  [dB]



A hiba pillanatértéke **bement-függő**, de tartománya korlátozott ( $LSB = 2 / 2^8 \approx 0.008$ )



## Szélessávú-zaj modell (sztochasztikusan lineáris modell)

*Noise and [effective] resolution go hand in hand; one defines the other [R. Schreiber]  
The effective bits is a scaled version of the SNR [M. Grove]*

A statisztikus nézőpontú kvantálási tétel szerint, a kvantálás hatása - **telítésmentes** működésnél, függetlenül a bemenettől (!) – additív<sup>1</sup> szélessávú-zaj forrással modellezhető: round( ) művelet esetén a **hiba egyenletes** amplitúdó eloszlású, spektrálisan **fehér zaj**, és a zaj eloszlás **szórásnégyzete** (vagyis a teljes zaj **teljesítmény**, a teljes  $f_s/2$  Nyquist-sávban)

$$P_Q = \frac{(\Delta x)^2}{12}$$

független az  $f_s$  mintavételi frekvenciától, és  $\Delta x$  : felbontás (mértékegység)

Maximális,  $X_{FS}/2$  amplitúdójú **szinuszos jel** (teljesítménye:  $P = ((X_{FS}/2)/\sqrt{2})^2 = (X_{FS})^2/8$ ) és **n bites** felbontású **kvantáló** ( $\Delta x = X_{FS}/2^n$ ) esetén a **maximális jel/(kvantálási-)zaj teljesítmény arány**

$$SQNR_{\max} [dB] = 10 \cdot \log \frac{P}{P_Q} = 10 \cdot \log \left( (2^n)^2 \cdot \frac{3}{2} \right) = 6 \cdot n + 1.8,$$

*bitenként 6dB* javulás várható (ideális kvantálónál)

Megfordítva: egy eszköz szinuszos jellel **mért SNR [dB]** jel/zaj arány jellemzője alapján

$$n_{\text{eff}} = \frac{SNR[dB] - 1.8}{6}$$

virtuális bitszámú *ideális* kvantálónak "felel meg" (**ENOB** : *effective number of bits*). Ez a modell azt feltételezi, mintha a teljes zaj (és torzítás) oka csakis a kvantálás lenne és így - egyetlen, igen szemléletes adattal - "méri" a konverter (ideálistól eltérő) minőségét, lásd még 36. oldal.

Az aktuális  $n_{\text{eff}}$  *effektív* felbontás (valós szám) mindig *kiseb*b (!) mint az eszköz **n névleges** szóhossza (és *változik* a jelfrekvencia függvényében: növekvő frekvenciával csökken!)

A szinuszos bemenő jel tényleges  $A$  ( $< X_{FS}/2$ ) amplitúdó értékének megfelelő jel/zaj arány

$$SQNR[dB] = 6 \cdot n + 1.8 - 20 \cdot \log \left( \frac{X_{FS}/2}{A} \right)$$

Optimális esetben, a bemenet *dinamikája* ( $\rightarrow$  "pozitív **SQNR**" tartomány) az elvi telítésmentes  $SQNR_{\max}$  ( $\rightarrow A_{\max} = X_{FS}/2$ ) értéktől az  $SQNR_{\min} = 0$  dB ( $\rightarrow A_{\min}$ ) értékig vehető

<sup>1</sup> A szélessávú-zaj modell *közelítés* "zsenialitása" természetesen nem az additivitás (ez következik a definícióból), hanem a linearitás: a hiba *jel-kapcsolata* ( $\rightarrow$  [statisztikai] függetlenség, gyengébb esetben: korrelátlanság [lineáris függetlenség]), valamint a hiba statisztikai természete ( $\rightarrow$  előre *ismert* tulajdonságú zaj; **UWN** : uniform white noise)

Ha a jelre *nem* teljesül a kvantálási tétel, akkor annak feltételét *mesterségesen* is biztosíthatjuk a bemenet szándékos(!) "zajosításával": hiba spektrum **fehérítés** (whitening).

Független valószínűségi változók összegének karakterisztikus függvénye ugyanis szorzat. Ezért elegendő, ha csak az egyik tényező teljesíti a *korlátozott* - véges tartójú - karakterisztikus függvényre vonatkozó feltételt. A kvantálási tételt tehát a **jelhez adott**, attól **független zaj (dither)** felhasználásával teljesítjük - többnyire felbontás-közel maximum amplitúdó értékkel ( $\rightarrow$  kis dinamika veszteség).

A *külső* zaj hozzáadás rendszerint minimális áramkörü többletet jelent; gyakran szükségtelen is, mert elegendő lehet a jelenlévő *belső* zaj (self-dithering). A dither ugyan *megnöveli* az eredmény varianciáját (szórásnégyzetét), az **átlagolás (szűrés)** viszont éppen ezt csökkenti !

Ahogy *mintavétel előtt* a szűrés (sávkorlátozás  $\rightarrow$  mintavételi tétel), hasonlóan *kvantálás előtt* additív zaj: dither (korlátozott karakterisztikus függvény  $\rightarrow$  kvantálási tétel) segíti a **jelfüggetlen** becsléseket

## "Túl"mintavételezés

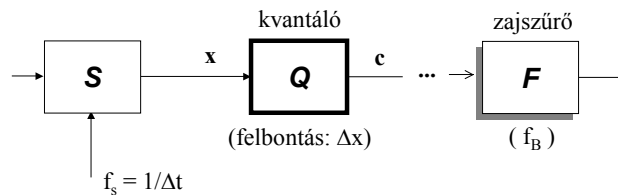
*As usual you never get a gain without a penalty [D. Owen]*

(a) A képmások jobb szeparálásával, a "túl"mintavételezés enyhíti a sávkorlátozó (AAF) illetve a rekonstruáló (AIF) analog szűrő követelményeit (utóbbi esetben gyakran nem is kell  $\sin x/x$  korrekció), így egyszerűbb a szűrő megvalósítása és kedvezőbb annak tranziens viselkedése

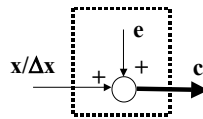
(b) A "túl"mintavételezés lecsökkenti a mintavétőt követő **kvantáló** kvantálási-zaj teljesítményét a Nyquist sávnál kisebb (ún. hasznos,  $f_B < f_s/2$ ) sávban, ha a zaj szélessávú, spektrálisan **"fehér"** ( $f_s$  - től független a teljes zaj-teljesítmény).

A hasznos, keskenysávú jel/zaj arány (és ennek megfelelően az effektív bitszám!) tehát mege-növelhető szűréssel (minta-csomag feldolgozás).

Megjegyzés: növekvő mintagyakoriságnál csak csökkenő felbontású kvantálás realizálható; kompenzál(hat)ja viszont a kisebb felbontást az, hogy a keskeny hasznos sávban, a "túl"-mintavételezéssel arányosan, kevesebb zaj marad (a "túl"mintavételezés redundanciája tehát - szűréssel - kihasználható az információ veszteség csökkentésére)



**linearizált modell** (a kvantálási hiba "fehér zaj"):



A kvantálási zaj teljesítmény az  $f_B$  hasznos sávban (in-band), ideális **szűrés után**

$$P_B = \frac{P_Q}{(f_s/2)} \int_0^{f_B} 1 \cdot df = \frac{P_Q}{M}, \quad \text{ahol } M = \frac{(f_s/2)}{f_B} > 1$$

$M$ : a **túlmintavételezési arány**,  $P_Q$ : az eredeti (az  $f_s/2$ -nek megfelelő teljes Nyquist-sávban fellépő) zaj teljesítmény

Az  $M$ -szeres zaj teljesítmény csökkenés, az ún. feldolgozási nyereség révén megnő a hasznos sáv jel/zaj aránya, ennek maximális értéke (szinuszos jel,  $n$  bites kvantáló, szűrés után)

$$SQNR_{\max} [dB] = 10 \cdot \log \frac{P}{P_B} = 10 \cdot \log \left( \frac{P}{P_Q} \cdot M \right) = 6 \cdot n + 1.8 + 10 \cdot \log(M)$$

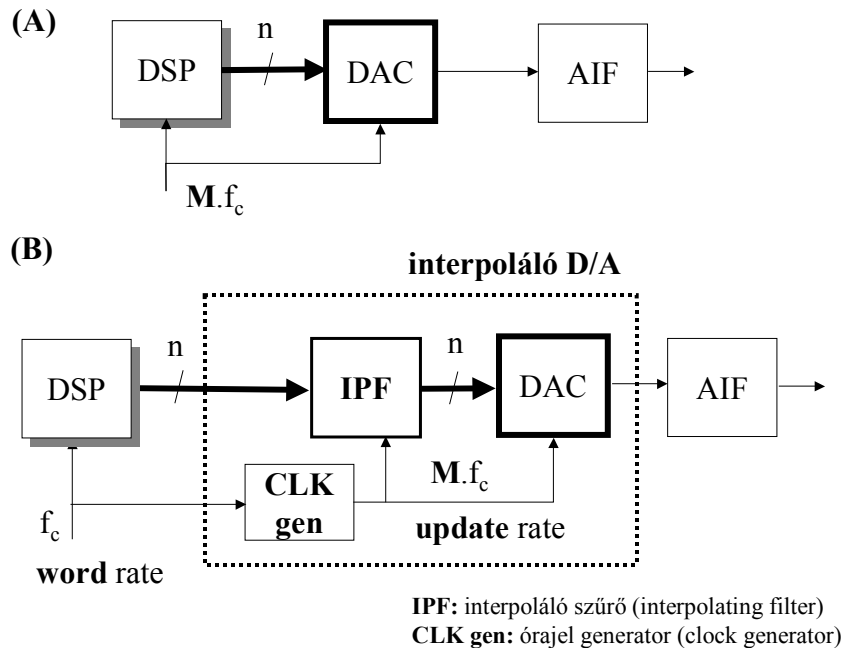
Oktávonként, azaz kétszeres "túl"mintavételezésnél a javulás: **3dB** ( $\rightarrow 0.5$  effektív-bit/oktáv)<sup>2</sup>. A kvantáló (egy-mintás) felbontási korlátja tehát "átléphető"(!) - kielégítő feltételeket teremtve. Ennek ára: kisebb a hasznos sáv, plusz szűrés szükséges

A szűrő után, ha a kimenet diszkrét-idejű, természetesen elegendő csak a hasznos sávnak megfelelő  $2 \cdot f_B$  mintagyakoriság ( $\rightarrow$  mintaritkítás, "újra"mintavételezés célszerű: **"multi-rate"** elv)

<sup>2</sup>  $SQNR_{\max} [dB] = 6 \cdot n + 1.8 + 3 \cdot \log(M) = 6 \cdot [n + 0.5 \cdot \log(M)] + 1.8$ , ahol  $\log$ : 2-es alapú logaritmus

## Interpoláló D/A (interpolating DAC) digitális képmás szűrés, mintasűrítéssel

Csökkenti a DSP terhelését és lényegesen megkönnyíti az alkalmazást a D/A átalakítóval egybeépített, beágyazott "túl"mintavételezés (mintasűrítés, interpoláció<sup>3</sup>)



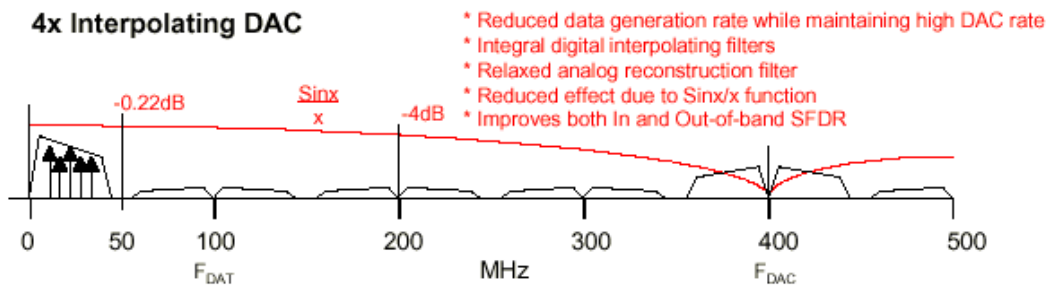
Amíg (A) esetben a teljes rendszernek kell  $M \cdot f_c$  adatfrissítési gyakorisággal működnie (annak ellenére, hogy a numerikus minták hasznos sávja csak  $f_B = f_c / 2$ ), addig (B) esetben „külső” hardver: digitális **interpoláló [szűrő]** és órajel generátor növeli meg az adatfrissítési gyakoriságot ( $M$ -szeres "túl"mintavételezés); az **órajel generátor** pl. fázis-zárt hurokkal realizált frekvencia szorzó (PLL clock multiplier)

Interpolációval enyhül az analóg simító (képmás, AIF) szűrő követelménye (javul a tranziens viselkedés is), lecsökken a  $\sin x/x$  spektrum csillapítás  $f_B$  közelében (így sokszor korrekció sem kell NRZ módú D/A átalakítónál); és oktávonként (kétszeres  $M$  növekedés) maximálisan **3dB jel/zaj arány** javulás is adódik a hasznos  $f_B = f_c / 2$  sávban ( $f_c = F_{\text{DAT}}$ ).

Viszont a D/A átalakítóknak  $M$ -szeres adatfrissítési gyakorisággal kell működniük ( $F_{\text{DAC}} = M \cdot f_c$ )

Példa: MB86060 [Fujitsu] on-chip IPF

### 4x Interpolating DAC



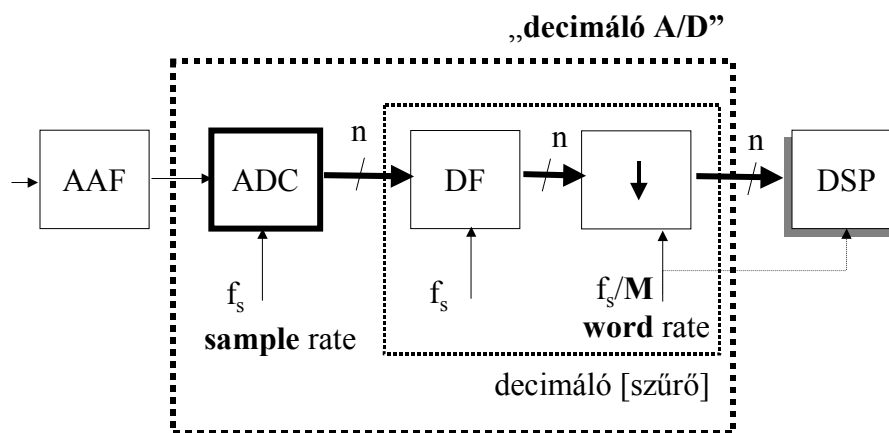
<sup>3</sup> a digitális **interpoláló** [szűrő] mintasűrítés (↑) és digitális szűrés (DF) egyesítése

## Digitális hasonmás szűrés, "túl"mintavételezéssel szokatlan (de nem meglepő) elnevezéssel: "decimáló A/D (decimating ADC)"

Az analóg sávkorlátozó (hasonmás, AAF) szűrő követelményeit jelentősen csökkenti (és tranziens viselkedését javítja) az enyhe "túl"mintavételezés és az A/D átalakítást követő, a hasznos  $f_B = (f_s/M)/2$  sávot kiemelő *digitális* szűrés.

A digitális szűrő kimenetén, a redundancia elkerülésére (és a DSP terhelés csökkentésére), az  $n$  bites numerikus minták gyakorisága az elegendő  $f_s/M$  gyakoriságra (word rate) *ritkítható*

A digitális szűrés és mintaritkítás praktikusán egyesíthető: "**decimáló [szűrő]**", és módosításával lehet hatásosan<sup>4</sup> illeszteni (programozni) eltérő sávzélesség igényekhez egy adott digitalizálót (front-end). Ha a szűrő "egybeépített" az átalakítóval (embedded decimating [filter]), ez igen megkönnyíti az alkalmazók dolgát és lecsökkenti a DSP terhelését



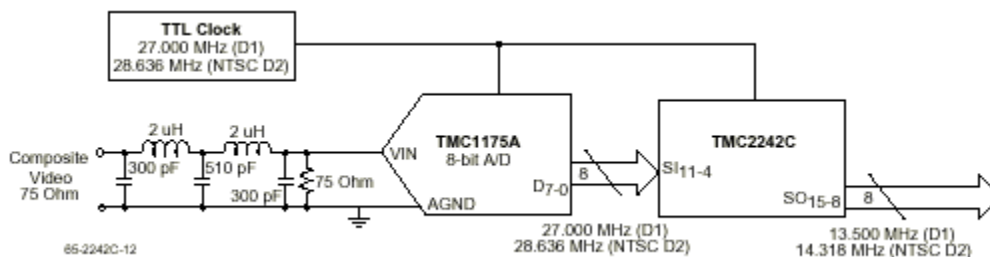
DF: digitális szűrő (digital filter)

↓ : mintaritkítás (decimating)

Oktávonként (kétszeres  $M$  értékre) maximálisan **3dB jel/zaj arány** javulás is adódik a hasznos  $f_B$  sávban (a kimeneten tehát effektív bitszám *növekedés* is elérhető).

Viszont az A/D átalakítónak  $M$ -szeres mintagyakorisággal kell működnie: a decimálás miatt az átalakító eredeti átviteli képessége (throughput; sample-rate) *lecsökken* ( $\rightarrow$  word-rate)

Példa: TMC2242C [Fairchild] decimating post-filter ( $M = 2$ )



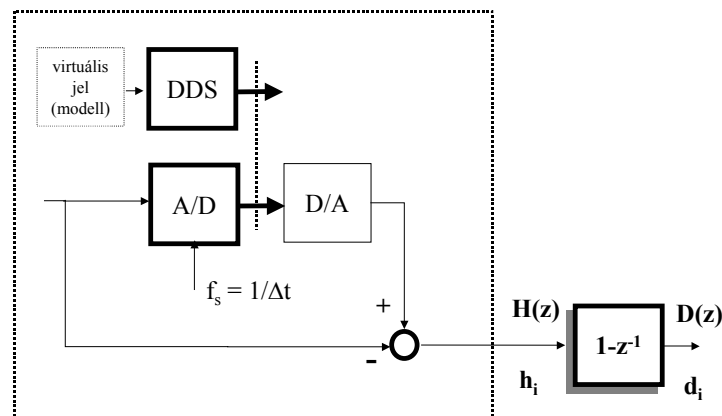
<sup>4</sup> Változó mintavételei (ill. adatfrissítési) gyakoriság esetén módosítani kell az *analóg* AAF: hasonmás (ill. AIF: képmás) szűrő sávját is. Ez elkerülhető **fix** és **maximális** mintavételei (ill. adatfrissítési) *gyakoriságú* átalakító és **programozható digitális** decimáló (ill. interpoláló) szűrő alkalmazásával

## Hiba processzálás (differencia képzés)

Növekvő **túlmintavételezés** esetén a kisfrekvenciás ( keskenysávú, a hasznos sávban lévő ) jel egymást követő numerikus mintái egyre kevésbé különböznek, ezért a *hiba "differencia"*

$$d_i = h_i - h_{i-1}$$

*kisfrekvenciás*, a jelet zavaró (in-band) része nagymértékben *lecsökken* (a késleltetési operátor a mintagyakoriság reciproka:  $\Delta t = 1/f_s$ )



A diszkrét idejű differencia művelet transzfer függvénye:  $1 - z^{-1}$ , vagy  $z$  tartományból konvertálva a folytonos idejű frekvencia tartományba ( $0, f_s/2$ ):

$$\left| 1 - e^{-j\omega \cdot \Delta t} \right| = 2 \cdot \sin(\pi f / f_s) \approx 2 \cdot (\pi f / f_s), \text{ ha } f \ll f_s/2$$

vagyis - amint ez várható - *nagyfrekvenciás kiemelő* (felüláteresztő szűrő) jellegű

**Megjegyzés:** még hatékonyabb hiba-processzálás (azaz zaj-spektrum formálás) a **másod** (vagy magasabb, L-ed) **rendű** differencia képzés ( $L = 2$ ):

$$d_i = h_i + h_{i-2} - 2 \cdot h_{i-1}$$

a művelet transzfer függvénye:

$$(1 - z^{-1})^2$$

Praktikusan **visszacsatolással** - a kvantálót visszacsatolásba "ágyazva" - realizálható a kvantálási zaj spektrumának formálása, amely - **túlmintavételezéssel** kombinálva - nagy-mértékben lecsökkenti a *hasznos, keskeny sávba eső* zaj-teljesítményt (magnöveli a jel/zaj arányt), így lehetőséget ad a realizálásnál igen előnyös **durva kvantáló** hatásos - **szűréssel** együtt *finom felbontást*<sup>5</sup> adó - alkalmazására

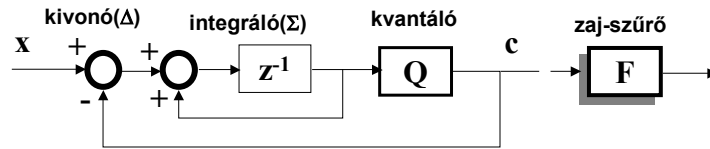
<sup>5</sup> Az átalakító mag (sub-converter) *eredeti* felbontását tehát - egy szűk frekvencia sávban - jóval túllépi a teljes rendszer *effektív* felbontása. Itt nem maga a „nyers” kvantálás, hanem a (jel)feldolgozás a lényeges mozzanat! Az ilyen típusú D/A és A/D átalakító **rendszer**-szinten hasonló struktúrájú, a különbség főként abban áll, hogy melyik funkciót kell a digitális ill. az analóg tartományban megvalósítani

## Zajformálás (zaj-differenciálás) és szűrés spektrum szeparálás

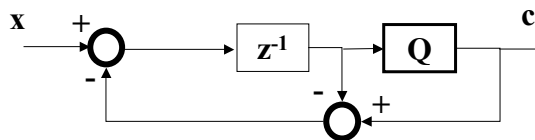
Visszacsatolással (tracking loop) átlagosan zérus értékű az (ábrán diszkrét-idejű) **integráló** kimenete, ez minimalizálja a kisfrekvenciás *differenciát*  $x$  és  $c$  között.

Tehát a **nagy mintagyakoriságú** numerikus mintasorozat ( $c$ : data stream) lokális "átlag"értéke pontosan követi a bemenetet (a késleltetési operátor  $\Delta t = 1/f_s$ )

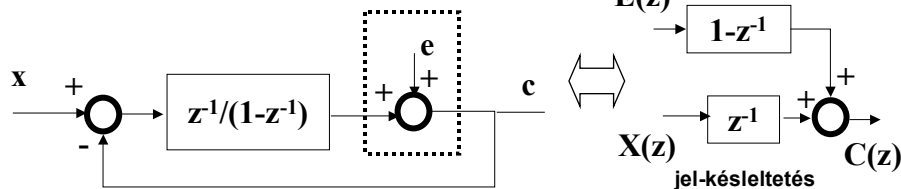
“jel” visszacsatolás



ekvivalens topológia: “hiba” visszacsatolás



linearizált modell (a kvantálási hiba “fehér zaj”)



A jel és kvantálási-zaj spektrum szeparálódik (!), a keskenysávú jelre a transzfer függvény:  $z^{-1}$  (ez csak késleltetés), míg a szélessávú zajt formáló transzfer függvény:  $1 - z^{-1}$  (ez diszkrét idejű **elsőrendű differenciáló** → frekvencia szelektív: nagyfrekvenciás kiemelő, *felüláteresztő* szűrő)

Túlmintavételezés (**OS**: oversampling) és zajformálás (**NS**: noise shaping) kombinálása szűréssel (**F**: filter) hatásosan lecsökkenti a **hasznos** keskeny **sávban** ( $f_B$ , in-band) a zavaró kvantálási zaj teljesítményét

$$P_B = \frac{P_Q}{(f_s/2)} \int_0^{f_B} [2 \cdot \sin(\pi f / f_s)]^2 df \approx \frac{P_Q}{M^3} \cdot \frac{\pi^2}{3}, \quad \text{ahol } M = \frac{(f_s/2)}{f_B} \text{ és } f_B \ll f_s/2$$

$M$  : a túlmintavételezési arány (OSR: oversampling ratio),  $P_Q$  : az eredeti zaj teljesítmény

A zaj-csökkenésnek megfelelően, a maximális jel/zaj arány ( $n$  bites kvantáló, szűrés után)

$$SQNR_{\max} [dB] = 6 \cdot n + 1.8 + 3 \cdot 10 \cdot \log(M) - C(1), \quad \text{ahol } C(1) = 10 \cdot \log \frac{\pi^2}{3} = 5.2$$

A feldolgozási nyereség (processing gain) oktávonként (kétszeres túlmintavételezés), elsőrendű zaj-differenciálással : **9dB** (→ 1.5 effektív-bit / oktáv),  $C(1)$  konstans veszteség mellett

A megnevezés: **“OS (oversampling) átalakító”**<sup>6</sup> (bár a zajformálás, szűrés is lényegi művelet!), kiemelve a *kvantálónak* a hagyományos (közvetlen, Nyquist-gyakoriságú) eszköztől igen *eltérő* működési feltételét; vagy **“DS (delta-sigma) modulátor”**, utalva arra, hogy az adatfolyam lokális átlagértékébe “kódolt” az információ és az *szűréssel* nyerhető vissza (1 bites Q esetére lásd 31. és 32. oldal)

<sup>6</sup> A matematikailag ekvivalens formákat szokásos külön is megnevezni : „**error diffusion** modulátor” (= hiba-visszacsatolás) ill. „**delta-sigma** modulátor” (= jel-visszacsatolás)

## DSM: delta-sigma modulátor (data stream)

*Delta-[sigma] modulation is not a circuit technique - it's a religion [J. Candy]*

Hatékony, **másod** (vagy még inkább magasabb, L-ed) **rendű** zaj "kisöprés" módosított zajformáló (modulátor) struktúra felhasználásával realizálható (lásd **2.3** feladat)

(1) maga a visszacsatolásba ágyazott *kvantáló* legyen egy "hatásos (azaz egy teljes zajformáló)" kvantáló. A linearizált modell alapján közvetlenül belátható, hogy ez a "**kettős hurok**" hatásában L = 2 rendű zaj-differenciálást eredményez

*Iterációval* kapjuk a több-hurkos, L-ed rendű ( **multi-loop**, high-order loop ) zaj modulátor topológiát. L > 2 esetén már külön gond a visszacsatolás potenciális instabilitása

(2) a zajformáló modulátorban (signal path) fellépő *kvantálási hibát* mérjük meg egy "hatásos (zajformáló)" kvantálóval (noise path). Célszerűen kombinálva az egymást követő (és "potenciálisan stabil"), **kaszkád** zaj-formálók kimeneteit: kioltva a megelőző fokozat zajforrását (**NC** : noise cancellation)<sup>7</sup>, kapjuk a hatásában L = 2 rendű zaj-differenciálást. (Az első fokozat ismeretlen hibája kétszer lép fel - *ellentétes* polaritással, így ideális esetben kiesik, és csak a másodiké: "a hiba hibája" marad meg)

A **többfokozatú** ( **multi-stage**, cascade type ), *több kvantálós* konfiguráció megoldja a stabilitási problémát és "fehériti" a zajt; elnevezése: **MASH** (Multi-stAge noise SHaping) struktúra

(3) az előző két módszer kombinálható (például **1-1-1MASH** vagy **2-1MASH** → L = 3), és csak a mérnöki "fantázia" - meg a technológia - szab határt különféle speciális (alkalmazáshoz igazodó) változatok megalkotására. (Példaként, lásd **2.6** és **3.3** feladat.)

A topológia variációk és realizálási korlátok (!) elemzéséhez praktikus és igen hatásos eszköz a *szimuláció* (de hosszú adat-sorozatokkal kell számolni)

**L-ed rendű** zajformálás (differenciálás):  $(1 - z^{-1})^L$  zaj transzfer függvény esetén, a hasznos sávban a **maximális** jel/zaj arány (szinuszos jel, szűrés után)

$$SQNR_{\max} [dB] = 6 \cdot n + 1.8 + (2L + 1) \cdot 10 \cdot \log(M) - C(L)$$

$n$  : a kvantáló bitszáma (multi-bit)

$L$  : a zajformálás rendje (noise shaping order)

$M = (f_s/2)/f_B$  : túlmintavételezési arány (OSR: oversampling ratio),  $M \gg 1$

$f_B$  : hasznos sáv (in-band)

$C(L) = 10 \cdot \log \frac{\pi^{2L}}{2L + 1}$  : konstans veszteség

Ezzel *ekvivalens* forma:

$$SQNR_{\max} [dB] = 6 \cdot \left( n + \left( L + \frac{1}{2} \right) \cdot \log(M) - K \right)$$

ahol  $K$  : struktúra függő konstans,  $\log$  : 2-es alapú logaritmus (és láthatóan, a  $M$  túlmintavételezés növelésével *oktávonként*  $(L + 0.5)$  bit a feldolgozási nyereség, némi veszteséggel)

A módszer hatásosan javítja a kvantáló eredeti ( $n$  bites) felbontását : kis bitszámú (durva, kedvezően realizálható) kvantálóval is nagy jel/zaj arány (finom effektív felbontás) valósítható meg (keskeny sávban, elég nagy  $M$  és  $L$  értékkel), szűréssel kombinálva

A "fordított": **szigma-delta** ( $\Sigma\Delta$ ) megnevezés is elterjedt (nickname: "**Greek**" modulator)

<sup>7</sup> A kiemelt zaj a második fokozatban *jel* transzfer-függvényt "lát", a második fokozat kimenetét *differenciálva* és *kivonva* az első kimenetéből, ideális („illesztett”) esetben "eltűnik" az első fokozat zaja (→ NC); a második fokozat megmaradó zajforrását pedig újabb differenciálás formálja (→ L = 2).

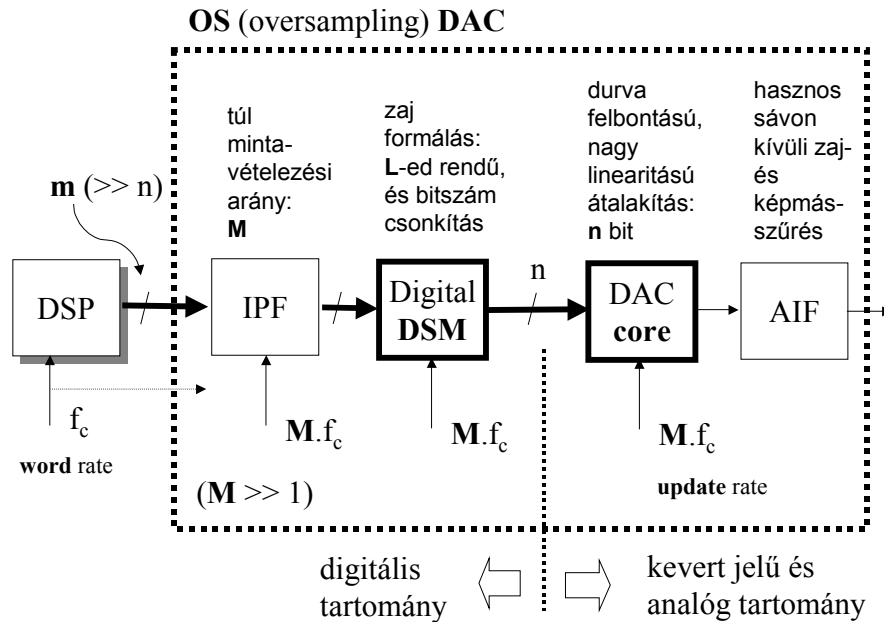
Kisebb rendű modulátorok (hibát processzáló) kaszkád kapcsolása (és zaj-kioltó művelet) ad tehát stabil, magasabb rendű zajformáló modulátort (lásd **2.3** feladat)



## OSDAC

### delta-sigma D/A átalakító

Négy alpművelet együttese az **OSDAC**, ebből kettő digitális: jelentős **túlmintavételezéssel** (interpolációval) párosított **zajformálás** és bitszám **csonkítás** ( $n \ll m$ ); az ezt követő belső **D/A mag** kis felbontású, az eredeti nagy felbontású hasznos jelet **analóg szűrés** állítja vissza



A bemenő  $m$  bites,  $f_c$  adatfrissítési gyakoriságú adatokból digitális interpoláló szűrő (IPF) hozza létre az  $M (\gg 1)$  - szeres túlmintavételezést (mintasűrítést), majd *digitális* delta-sigma modulátor (DSM) söpri ki a zajt a hasznos  $f_B = f_c / 2$  sávból és *újrakvantálja* (jóval kisebb:  $n \ll m$  bitszámra csonkítja) az adatokat<sup>8</sup>

Az adatfolyamot kedvezően realizálható  $n (\ll m)$  bites,  $M \cdot f_c$  adatfrissítési gyakoriságú belső **D/A-mag** (DAC core) konvertálja.

**Megjegyzés:** multi-bites ( $n > 1$ ) zajformáló topológiához igen *nagy linearitású* (kis transzfer torzítású) D/A átalakító-mag szükséges. Ez pl. speciális - a túlmintavételezést és az átlagolást kihasználó, ún. *dinamikus* linearizálási technika alkalmazásával valósítható meg a gyakorlatban : a "nem-hibátlan" **egység**-elemekből álló (azaz *redundáns*) D/A-mag egység-komponenseinek kiválasztását minden adatfrissítésnél célszerűen *variálva* ( element scrambling, **suffling** ) módosul a torzítási spektrum, a **szűrés** pedig lecsökkenti a komponens-hibákból adódó hardver torzítást ( **DEM**: dynamic element matching ).

Az analóg rekonstruáló (simító, AIF) **szűrő** az OSDAC **szerves része** (annak ellenére, hogy rendszerint fizikailag különálló elem !); a zaj csillapítás alkalmazás függő.

A kimenet maximális jel/zaj aránya (a hasznos  $f_B = f_c / 2$  sávban)

$$SQNR_{\max} [dB] = 6 \cdot \left( n + \left( L + \frac{1}{2} \right) \cdot \lg(M) - K \right)$$

ahol  $K$  : DSM struktúra függő konstans,  $\lg$  : 2-es alapú logaritmus;

azonban *korlát* a bemenet (az  $m$  bites numerikus adatok) maximális jel/zaj aránya

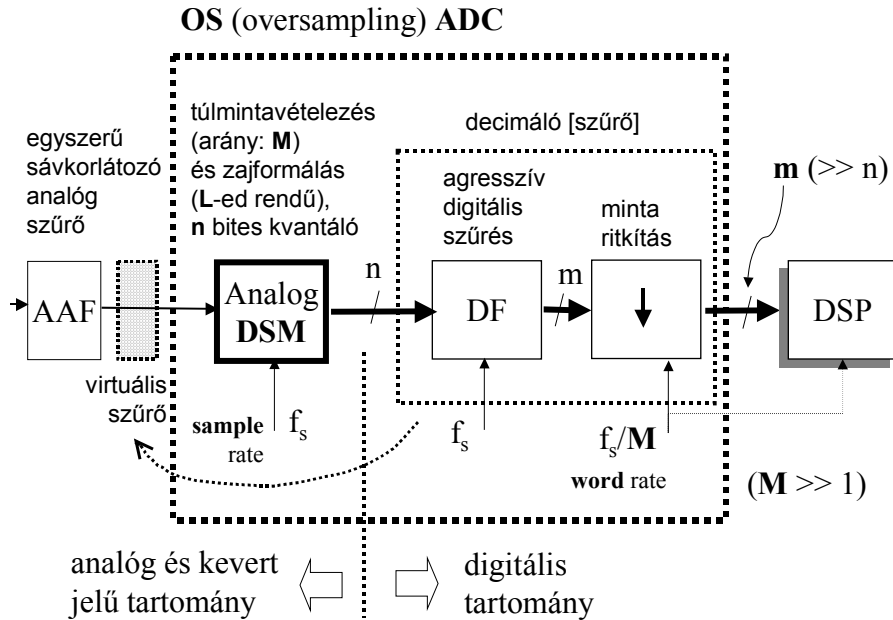
$$SQNR_{\max \text{ lim}} [dB] = 6 \cdot m + 1.8 = 6 \cdot (m + 0.3)$$

Igény lehet a *hasznos sáv* szélesítése, ez a  $M$  túlmintavételezési arány csökkentése, vagyis  $n$  (és  $L$ ) növelése révén lehetséges

<sup>8</sup>  $f_c \rightarrow M \cdot f_c$  : sample-rate conversion (SRC);  $m \rightarrow n$  : level (data-resolution) compaction

## OSADC delta-sigma A/D átalakító

Az OSADC két összetett művelet: analóg **delta-sigma moduláció (DSM)** és **agresszív digitális decimáló [szűrő]** kombinációja



Analóg DSM generálja a nagy ( $M \gg 1$ ) mintagyakoriságú és kis ( $n \ll m$ ) bitszámú adatfolyamot, igen kedvezően megvalósítható *durva* ( $n$  bites) *kvantáló*t és többféle topológiával realizálható  $L$ -ed rendű zajformálást használva ("viszonylag egyszerű" analóg elektronika)

A tényleges kimeneti nagy bitszámú ( $m \gg n$ ) numerikus mintákat *digitális szűrő* (DF) állítja elő, amely eltávolítja a hasznos  $f_B = (f_s/M)/2$  sávon kívüli (out-of-band) zajt és elvégzi az  $f_s/M$  értékű újra-mintavételezéshez (mintaritkításhoz:  $\downarrow$ ) szükséges sávkorlátozást. Ez utóbbi részben AAF funkció is, a rendszer átvitel tehát olyan, mintha a bemeneten lenne egy agresszív *hasonmás* szűrés: "virtuális szűrő". Praktikusan egyesíthető a szűrő és mintaritkító: "**decimáló [szűrő]**", amely rendszerint *többfokozatú* a kedvező megvalósításhoz ("igen összetett" digitális áramkör)

A kimeneti adatok *névleges* bitszáma (a szóhossz):  $m$ , azonban az *effektív* bitszámot a hasznos,  $f_B = (f_s/M)/2$  sáv maximális jel/zaj aránya korlátozza

$$SQNR_{\max} [dB] = 6 \cdot \left( n + \left( L + \frac{1}{2} \right) \cdot \lg(M) - K \right)$$

ahol  $n$  : a *belső* DSM adatfolyam bitszáma,  $K$  : DSM struktúra függő konstans,  $\lg$  : 2-es alapú logaritmus

Egy eszköz a szűrés (decimáló) paramétereinek módosításával - a túlmintavételezési arány ( $M$ ) változtatásával - illeszthető hatásosan *eltérő sáv szélességű* alkalmazásokhoz; de megváltozik az effektív felbontás is. (Megfordítva: programozható az effektív felbontás.)

A szűrő átvitele speciális feladatokhoz is tervezhető (pl. fáziskorrekció lineáris átvitelhez az audio tartományban)

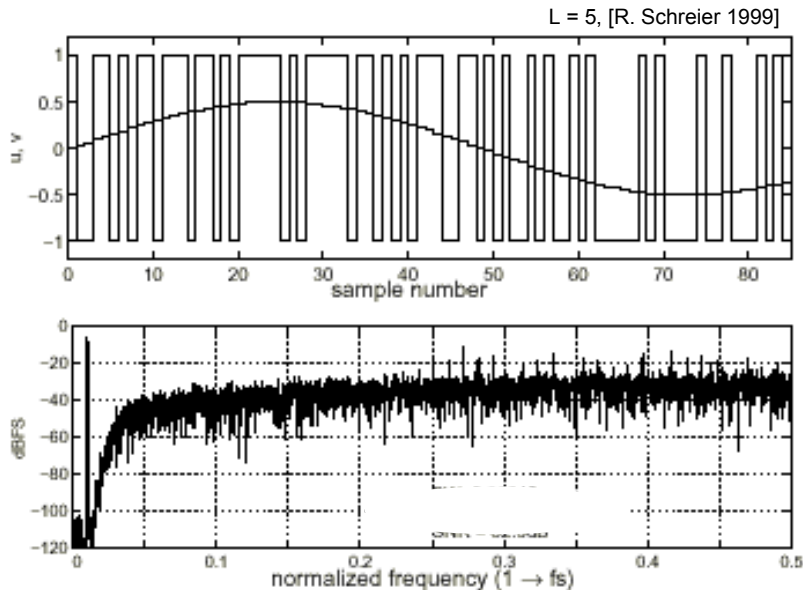
## 1 bites (bitstream) technika

A feldolgozási nyereség révén, a **DS (delta-szigma)** modulációt alkalmazó átalakítók kis bit-számú (durva) átalakító-maggal is képesek *keskeny frekvencia sávban* nagy jel/zaj arányú adat-folyamot (data stream) produkálni

A szükséges átalakító-mag megvalósításánál **n = 1 bit** a legkedvezőbb eset (1 bites **D/A**: jel(referencia) *kapcsoló*, 1 bites **A/D**: analóg *komparátor*, és ezek "eredendően" igen *nagy linearitású* eszközök<sup>9</sup> – lásd 31. és 32. oldal).

Bár itt kérdéses az egyszerű zaj-modell érvényessége (pl. nem kívánatos torzítás: diszkrét spektrum vonalak (tones, "DC-resonance") fellépése tapasztalható a hiba jelfüggése miatt), a "fehér-zaj" hipotézis elfogadható a globális jel/zaj arány becsléshez (felső korlát) és jól illusztrálja a zajformálást

Az 1 bites zajformáló kimenő bitfolyamának (bitstream) lokális "átlag"értéke követi a bementet (**PDM**: 'pulse density modulation'); az információ tehát *nem egyedi* numerikus mintákba koncentrálódik (*nem PCM*: 'pulse code modulation'), a nemlineáris zajformálás "elosztja" az információt hosszú, dinamikusan változó *bitsorozatba* (és ebből szűréssel nyerhető vissza a jel Nyquist sávú információja)



A "megtévesztő" elnevezés ellenére, az **1 bites** (DSM) technika, a **szűrést követően** (!)

- (a) pontosan reprodukálja a keskenysávú jelet (igen jó szűrővel az *analóg* tartományban<sup>10</sup>; a szükséges túlmintavételezést digitális interpoláló [szűrő] realizálja), vagy
- (b) finom felbontású numerikus mintákat ad (a jel sávjának megfelelő Nyquist gyakorisággal a *digitális* tartományban, a digitális decimáló [szűrő] után)

Intenzív **jelprocesszálás** ("maximalizált" Digitális technológia) és jó időfelbontású **zajformálás** a "digitális trükk" a finom amplitúdó felbontású átalakításhoz (viszonylag keskeny sávban) - igen kedvezően realizálható (az Analóg technológiát "minimalizáló") *durva* átalakító-magot használva, meglehetősen *nagy* ( $M \gg 1$ ) túlmintavételezési igény mellett („big D / little A” type design)

<sup>9</sup> RZ-módú 1 bites D/A átalakító minimalizálja a kapcsolási tranziensek hatását (folytonos-idejű esetben)

<sup>10</sup> az analóg rekonstruáló szűrőt persze jóval nehezebb realizálni, mint a digitális interpoláló (vagy decimáló) szűrőt

## Konverter alapstruktúrák

A frekvencia tartományt tekintve, mert alapkorlát a diszkrét-idő "természet", a hasznos sávszélesség és az aktuális átalakító(mag) mintagyakoriságának összevetése alapján, két jellegzetesen *eltérő* osztályba különíthetjük el az átalakítókat

### (1) Nagy mintagyakoriságú ("Nyquist-rate") átalakítók

Ezek az eszközök kihasználják a teljes, lehetséges (Nyquist) sávot, egyedi mintákra optimalizált struktúrák (maximális pontosságú minták → minimalizált mintagyakoriság)

Megjegyzés: a jelfeldolgozó láncban szükséges *sávkorlátozó* (AAF), illetve *rekonstruáló* (AIF) *analóg* szűrő kedvező gyakorlati megvalósításához, rendszerint maga a "Nyquist-átalakító" is enyhe "túl"mintavételezéssel üzemel. Például erre utal az "interpolating DAC" megnevezés: beépített interpoláló [szűrő] növeli kismértékben a bemeneti, "nyers" Nyquist-gyakoriságot

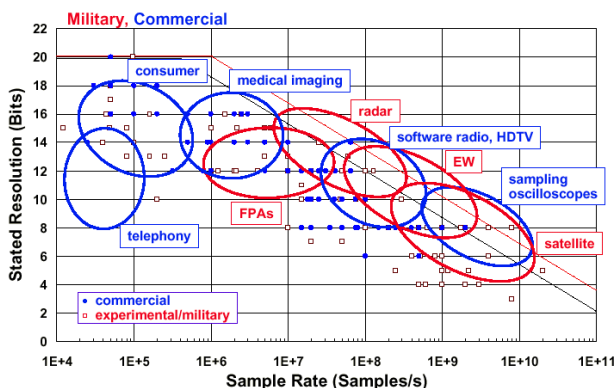
### (2) Finom felbontású ("OS: oversampling [multi-rate, DSM]") átalakítók

Ezek az eszközök *korlátozott sávszélességű*, ezért jó felbontású átalakítók. (Az **átalakító-mag** működési (minta-)gyakoriságánál lényegesebb szűkebb a *hasznos* sáv. A "holt" sáv alkalmas a zaj spektrum formálására és kiszűrésére, így kedvezően realizálható "durva" felbontású átalakító-mag is elegendő nagy effektív felbontás eléréséhez.)

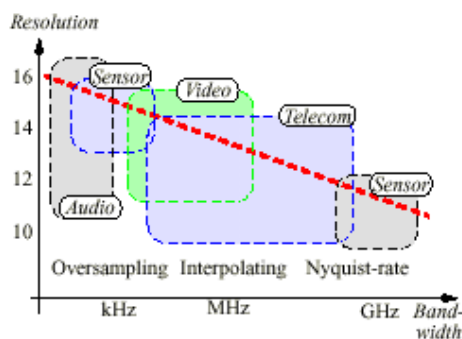
Ezek a típusok minta sorozatra optimalizált struktúrák ( → "beágyazott" numerikus minta feldolgozás), így elsősorban a hasznos sáv **jel/zaj aránya** minősíti teljesítőképességüket

Megjegyzés: a túlmintavételezés (OS) jelző ellenére, az **OSDAC bemeneti** adatfrissítési- ill. az **OSADC kimenő** minta-gyakorisága (word rate) a szűk, hasznos sávnak megfelelő (Nyquist-) gyakoriság, elkerülendő a DSP felesleges terhelését („multi-rate” elvű konverzió, „Nyquist-rate” adat-interfész)

A csoportosítás azt a gyakorlati tény is tükrözi, hogy az átalakítók **megvalósításánál** a minta-gyakoriság ( ≈ sávszélesség ) és a felbontás ( ≈ pontosság ) *egyidejű* javítása egymásnak **ellentmondó** követelmény (high resolution → low[Nyquist] rate; high rate → low resolution)



ADCs - a few applications [B. Walden, 1999]



CMOS DACs and applications [J. Wikner, 2000]

Nagy mintagyakoriságnál domináns korlát a *mintavételi (adatfrissítési) időhiba* (sampling [clock] jitter), míg a finom felbontás alapkorlátja a *termikus zaj*.

A technológiai és topológiai fejlesztéseken túl, az ellentmondás feloldását további, **rendszer-szintű** megoldások is segítik, mint

a *párhuzamos működésű* ( konkurrens; time-**interleaving** ), vagy

a *frekvencia-sávban szeparált* ( rész-sávú; filter-bank )

architektúrák

## Kvantálási zaj ekvivalenciák (korlátok a bitszámra)

A kvantálási hiba ( $\approx$  spektrálisan "fehér zaj") teljesítménye<sup>11</sup>  $n$  bites átalakítónál, függetlenül az  $f_s$  mintagyakoriságtól,

$$P_Q = \frac{(\Delta x)^2}{12} = \frac{(U_{FS} / 2^n)^2}{12}$$

$U_{FS}$  [V]: jeltartomány

A megvalósításnál fellépő további alapvető hibaforrások (mint például a *termikus zaj*, vagy a *mintavételi [adatfrissítési] egyenetlenség* miatt fellépő amplitúdó hiba) zajteljesítményét  $P_Q$  - val egyenlővé téve - mintha azok csak egyedül (!) hatnának - jellegzetes (felső)korlátokat kaphatunk a bitszámra

### (1) termikus zaj (Johnson or Nyquist noise)

A teljes Nyquist ( $f_s/2$ ) sávra vett termikus zajteljesítmény  $P_{term} \approx 4kTR \cdot (f_s/2)$ , ebből a  $P_Q = P_{term}$  megfeleltetéssel a "termikus" *bitszám-korlát*

$$n_{term \lim} = ld \left( \sqrt{\frac{(U_{FS})^2 / R}{24 \cdot kT \cdot f_s}} \right)$$

$ld$ : 2-es alapú<sup>12</sup> logaritmus

$k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  [W·s/K]: Boltzmann állandó

$T$  [K] = 273 + °C: hőmérséklet

$R$  [ $\Omega$ ]: effektív termikus ellenállás

Ez az adat a *finom felbontású* (igen nagy bitszámú, ezért kis mintagyakoriságú) átalakítók alapkörlátja

Példa:  $f_s = 44.1$  KHz,  $U_{FS} = 2$  V,  $R = 600 \Omega$  és 27 °C esetén  $n_{term \lim} \approx 20$

### (2) mintavételi (adatfrissítési) egyenetlenség (sampling [clock] jitter)

Ha az egyenletes (pont)mintavétel idő-bizonytalansága, az ún. "apertura hiba" értéke:  $\tau_a$ , akkor *legrosszabb* esetben, azaz maximális amplitúdójú ( $U_{FS}/2$ ) és frekvenciájú ( $f_s/2$ ) *szinuszos* jelet null-átmeneténél (a legnagyobb változásnál) mintavételezve és amplitúdó hibává konvertálva<sup>13</sup> az időhibát:  $u_{rms} / \tau_a \approx du/dt = (U_{FS}/2) \cdot \pi f_s$ , a  $P_Q = (u_{rms})^2$  egyenlőségből adódik az "apertura" *bitszám-korlát*

$$n_{aper \lim} = ld \left( \frac{1/f_s}{\pi \sqrt{3} \cdot \tau_a} \right)$$

$ld$ : 2-es alapú logaritmus

$\tau_a$ : mintavételi időhiba (sampling jitter)

Ez a domináns limit *növekvő mintagyakoriságú* átalakításnál: "-1 bit/oktáv", vagyis kétszeres  $f_s$  növekedésnél (azonos  $\tau_a$  érték mellett) 1 bittel *csökken* az effektív amplitúdó felbontás. (Elsősorban a becslés - gyakorlatban is tapasztalható - jellege érdemel figyelmet, hiszen a legrosszabb eset praktikusán igen kis valószínűségű)

Példa:  $f_s = 10$  MHz ( $\rightarrow \Delta t = 1/f_s = 100$  ns) és  $\tau_a = 2$  ps adatokkal  $n_{aper \lim} \approx 13$  (vagyis „megaHz” tartományú gyakoriságnál csak „picoSec” tartományú jitter engedhető meg!)

<sup>11</sup> célszerűen 1  $\Omega$  - ra vett teljesítmény

<sup>12</sup>  $ld(x) = \frac{\log(x)}{\log(2)}$

<sup>13</sup> a mintavétel időpillanatában fellépő jel változással (a derivált értékével) *arányos* a "zaj"

## Feladatok – 2

**2.1** Adjuk meg (részletes levezetéssel) az  $L$  - ed rendű zaj-differenciálás transzfer függvényét (és közelítését) a *folytonos idejű* frekvencia tartományban. Ábrázoljuk az értelmezési tartományban LIN és LOG (dB) amplitúdó skálával,  $L = 1, 2, 3$  paraméterrel. Mit tapasztalunk  $f/f_s = 1/6$  esetén?

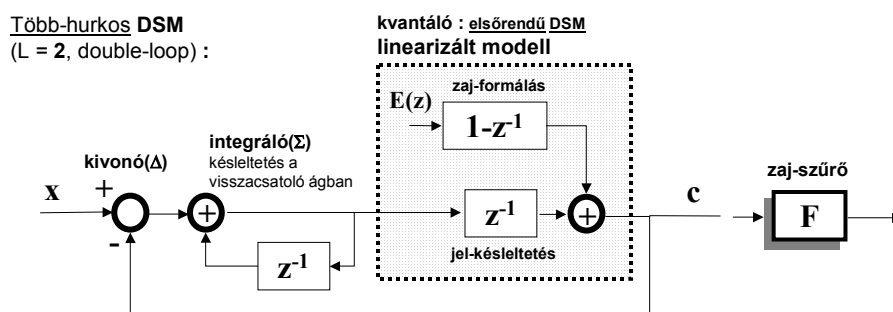
**2.2** 20 KHz-es hasznos sáv és  $n = 1$  bites felbontású kvantáló (**bitstream**) esetén, mekkora mintagyakoriságra ( $f_s$ ) lenne szükség 16 (effektív)bit felbontás eléréséhez

(a) csak túlmintavételezés („zero order” **OS + F**: filter),

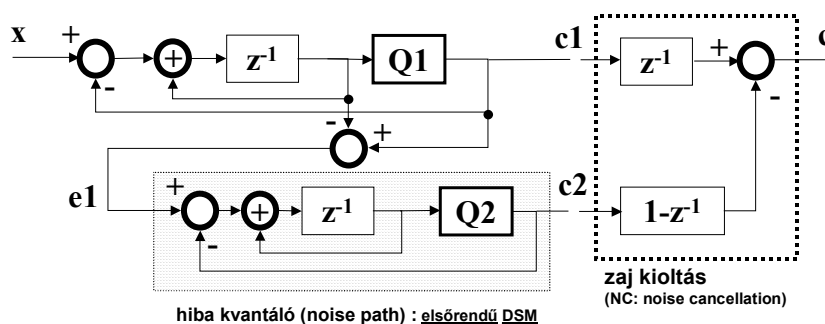
(b) első(vagy másod)-rendű zajformálás (**OS + 1<sup>st</sup>[or 2<sup>nd</sup>] order NS + F**) módszerrel?

Ha  $n = 5$  bites a kvantáló (**data stream**), akkor másodrendű zajformálásnál mennyi  $f_s$  értéke?

**2.3** A linearizált kvantáló modellt felhasználva, igazoljuk, hogy másodrendű ( $L = 2$ ) zajformáló az alábbi *több-hurkos (multi-loop)* illetve *kaszkád (MASH)* átalakító alapváltozat



**Kaszkád DSM (1-1MASH,  $L = 2$ ):**



A kaszkád DSM kimenete mindig multi-bites (még akkor is, ha a kvantálók 1 bitesek), miért?

**2.4** Vázzoljunk fel egy **2-1MASH** ( $L = 3$ , kaszkád **DSM**)<sup>14</sup> konverter topológiát. (A módszer egy másodrendű DSM stabilitását kombinálja *harmadrendű* zajformálással)

**2.5**  $n$  bites,  $L$  - ed rendű,  $M$  túlmintavételezési arányú zajformáló (**DSM**).

Igazoljuk (a) a hasznos sávban elérhető 'maximális jel/zaj arány':  $SQNR_{max}[dB]$  formuláját, és (b) a kétféle forma ekvivalenciáját (mekkora  $K$  : 'struktúra függő konstans' értéke és mennyi a felbontás-növekmény?)

Mutassuk meg, hogy  $L$  egységnyi növelésével a jel/zaj arány, ill. az effektív bitszám (ENOB) növekmény értéke közelítőleg(!):  $20 \cdot \log(M / \pi)[dB] \approx 3 \cdot \log(M / \pi)[bit]$ .

Ábrázoljuk az effektív bitszám  $M$  - függését *oktávonként egyenletes* skálával (c)  $L$  ( $= 1, 2, 3 \dots$ ) paraméterrel, ha  $n = 1$  (vegyük észre: kisebb  $M$  értékénél kevésbé hatásos  $L$  növelése!), illetve (d)  $n$  ( $= 3, 4, 5 \dots$ ) paraméterrel, ha  $L = 2$  (láthatóan:  $n$  növelésének hatása független  $M$ -től)

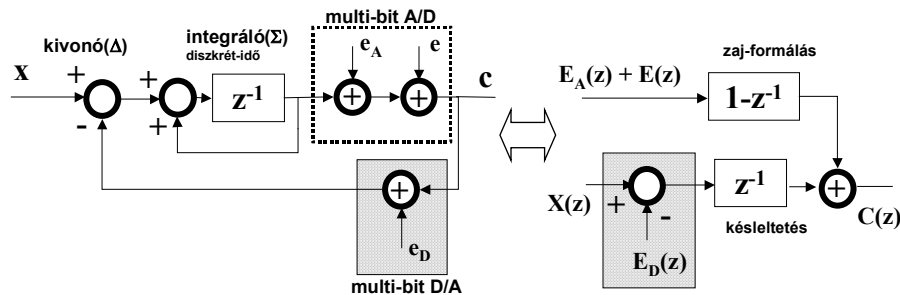
<sup>14</sup> Megjegyzés: két lépéses átalakítónak is tekinthető (*coarse and fine* converter). Nem szükségszerű persze, hogy mindkettő azonos típusú legyen; viszont a jó linearitáshoz célszerű, ha az első 1 bites DSM

## 2.6 Multi-bites ( $n > 1$ ), analóg DSM.

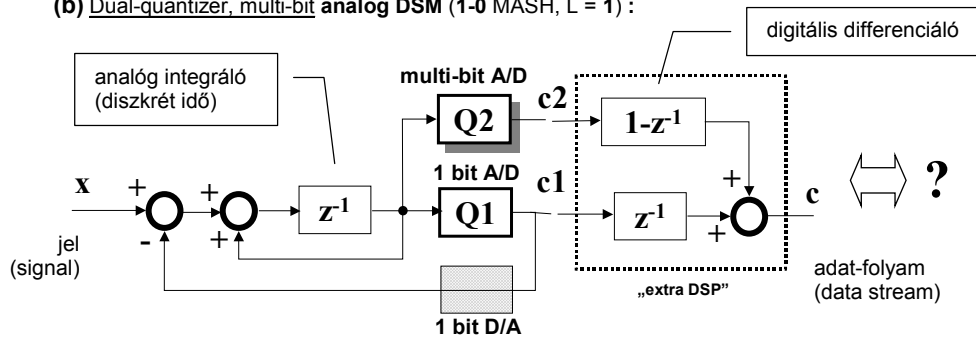
(a) Igazoljuk az ekvivalens topológiát ( $L = 1$ ): a visszacsatoló ágban lévő D/A átalakító  $e_D$  torzítására **nincs** zajformálás (a hasznos sávba eső zajt csak a túlmintavételezés csökkenti)! Ezért igen *nagy linearitású* (kis transzfer torzítású) D/A átalakítót kell használni.

Ráadásul, csak egy órajelnyi késleltetés lehet a hurokban (loop rate = 1 clock latency), ami igen gyors (egy lépéses: word-at-a-time = **flash**) A/D átalakítót kíván. A modell számba veszi az A/D realizálási hibáját is: plusz  $e_A$  torzítás

(a) Multi-bit analog DSM ( $L = 1$ ):



(b) Dual-quantizer, multi-bit analog DSM (1-0 MASH,  $L = 1$ ):



(b) Egy trükk a probléma megoldására: **1-0 MASH két kvantálós architektúra** [T. Leslie, B. Singh 1990]; a hatásos kvantáló (Q2) felbontása és a visszacsatolás (Q1) felbontása szétválik („multi-bites” kvantálás *kontra* „1 bites” visszacsatolás). Adjuk meg az ekvivalens topológiát (linearizált kvantáló modellek, hibamentes 1 bites D/A).

A multi-bites A/D a hurkon kívül van, így **kell** külső szűrő (a hiba korrekcióhoz); de pl. *több* lépéses, párhuzamos műveletvégzés is lehet a konverter bit-kereső algoritmus (pipelining), amelynek terjedési késleltetése kompenzálható. (A módszer **kombinálja** az OSADC és a Nyquist-rate technikákat, lásd 8. példa.)

(c) Alternatív megoldás: **2-1MASH ( $L = 3$ , kaszkád DSM)**, amelynél *csak a második* fokozat multi-bites és ez ad nagy dinamikát (míg a másodrendű zajformálást végző *első* fokozat 1 bites és ez a kulcs a linearitáshoz).

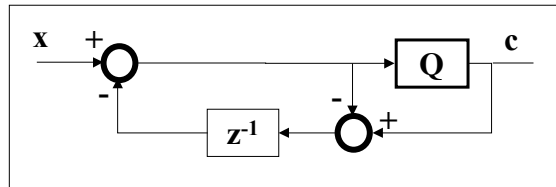
Vázoljuk fel a topológiát és mutassuk meg, hogy a második fokozat multi-bites D/A átalakítóját jellemző zaj-forrásra *másodrendű* (!) a zajformálás

**2.7 Az OSADC bementén** miért kell kiszűrni a  $k \cdot f_s$  közeli frekvenciájú (zavaró) jeleket ( $k$  egész szám,  $f_s$  a kis felbontású kvantáló-mag [túlmintavételezési] gyakorisága)?

**2.8** Illusztráljuk jellegzetes spektrum ábrákkal az interpoláló D/A ill. a "decimáló A/D" átalakítók működését, a "túl"mintavételezési arány:  $M = 2$  (vagy **4**); és azt is mutassuk meg: hogyan segíti a "túl"mintavételezés az analóg rekonstruáló (AIF) ill. sávkorlátozó (AAF) szűrő *kedvezőbb* megvalósítását

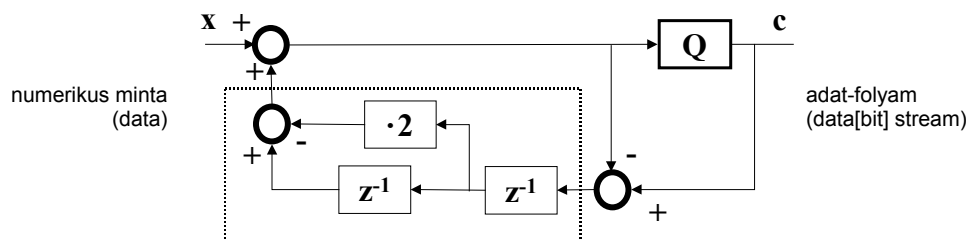
**2.9** A DSM eljárás egyik alapforrása a "hiba" visszacsatolás topológia (self-dithering, deterministic dither). *Analóg* DSM esetén *nem* praktikus az elrendezés, mert a visszacsatoló ágban végzett művelet hibájára nincs zajformálás (lásd **2.6** feladat). Ez nem hátrány **digitális DSM** esetén (sőt, pl. egyszerű szóhossz csonkítással realizálható a kvantálás és hiba-képzés, lásd 31. oldal)

"Hiba" visszacsatolás ( $L = 1$ , késleltetés a visszacsatoló ágban)



[ C. Cutler 1954/1960, U.S. Patent ]

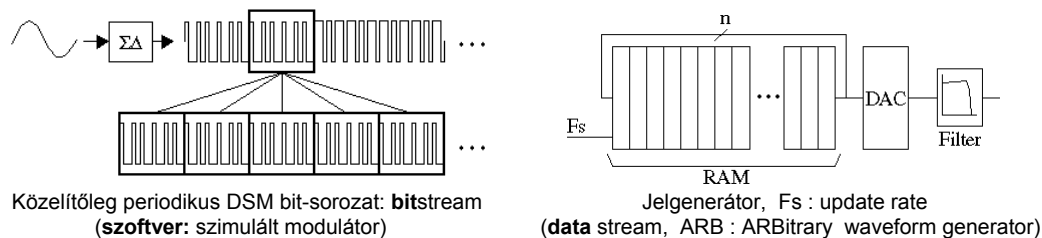
Másodrendű digitális DSM ("LSB(error)-feedback",  $L = 2$ ) :



Ha  $L > 1$  az igény zajformálásra, a késleltetést "predikciós" szűrő helyettesíti (amelynek átvitele:  $H(z) - 1$ , ahol  $H(z)$  a kívánt zaj-formáló transzfer függvény).

Igazoljuk, hogy a vázolt topológia *másodrendű* zajformáló. Megjegyzés: a szorzás ( $\cdot 2$ ) = shift. (V.ö. **3.2** feladat és 19. oldal.)

**2.10 Digitális DSM** kimenetének egy rövid szegmensét periodikusan rekonstruálva, nagy jel/zaj arányú *keskeny-sávú* vizsgáló jel generálható [B. Hawrysh, G. Roberts 1996]. "Beágyazott" teszteléshez (BIST : built-in self-test) igen hatékony az 1 bites forma, míg a multi-bites ( $n > 1$ ) változat pl. ARB generátor felbontását javíthatja



Hasonlítsuk össze a módszert a DDS (Direct Digital Synthesis) eljárással

**2.11** Mekkora lehet a  $\tau_a$  [ns] *apertura* hiba ( sampling [clock] **jitter**; timing **skew** in sampling ), ha emiatt legrosszabb esetben is legfeljebb 1/2 LSB amplitúdó hiba engedhető meg **(a)**  $n = 16$  bites felbontású átalakító és  $f = 20$  kHz frekvencia komponens, illetve **(b)**  $n = 8$  bit és  $f = 6$  MHz mellett?