

Feladat megoldások



Funkcionális megosztás

- 1.1 NRZ módú D/A (spektrum csillapítás)
- 1.3 (b) Frekvencia kompresszió („alul” mintavételezés)

Kvantálási zaj csökkentés

- 2.1 L-ed rendű zajformálás (differenciálás)
- 2.5 $SQNR_{\max}$ (n, L, M paraméterű DSM)

Elemi átalakítók

- 3.3 MASH11

Eszköz minősítés („ABC leves”)

- 4.1 D/A linearitás (INL, DNL)
- 4.4 Hasonmás (alias)
- 4.5 (b) SNR becslés (FFT)

Architektúrák (Nyquist rate)

- 5.7 SAR A/D *kontra* ciklikus A/D

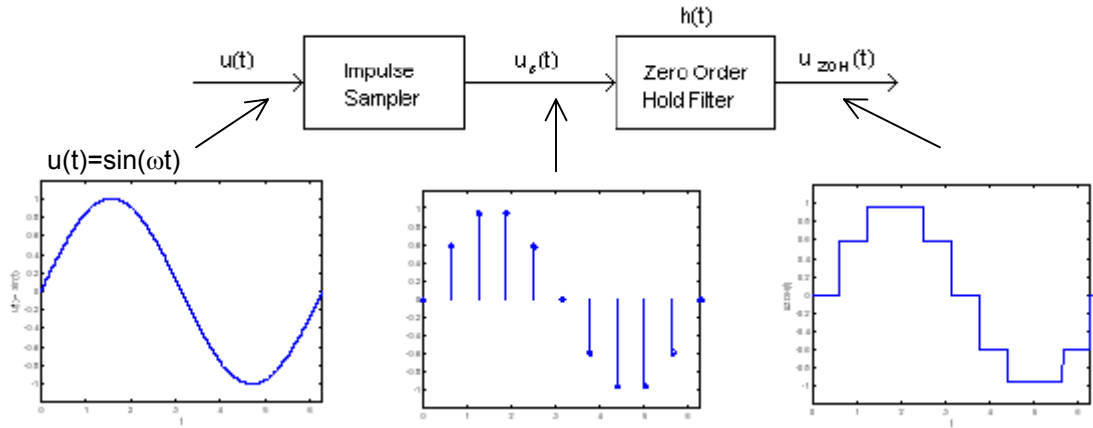
1.1 RZ (return-to-zero: "R2Z") módú D/A átalakító.

Vezessük le a fellépő amplitúdó-spektrum csillapítás frekvencia függését, legyen a tartási idő értéke: $\tau \leq \Delta t$. Szemléltessük a speciális **ZOH ("NRZ mode")**: $\tau = \Delta t$ és HOH ("zero stuffing"): $\tau = \Delta t/2$ eseteket. És mi a helyzet a fázissal?

Megjegyzés: a tartás transzfer függvényének „ Δt szorzó faktora” és az egyenletesen mintavételezett diszkrét idejű jel spektrumának „ $1/\Delta t$ szorzó faktora” kiegyenlíti (!) egymást (ezért ettől eltekinthetünk).
 $f_s = 1/\Delta t$ a mintavételi frekvencia (adatfrissítési gyakoriság).

A domináns **NRZ mód** (\equiv ZOH) elemzésének módszere a példa.

A "lépcsős" hullámformát generáló eljárás sémája:



[L. Dalton 2000]

ahol

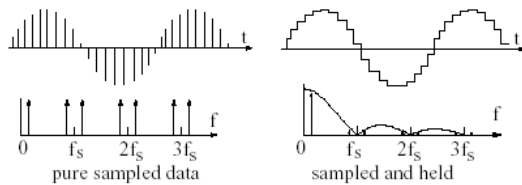
$$u_s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u(i \cdot \Delta t) \cdot \delta(t - i \cdot \Delta t) \quad \leftrightarrow \quad U_s(f) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=-\infty}^{\infty} U\left(f - \frac{i}{\Delta t}\right)$$

$$h(t) = 1, \quad 0 < t / \Delta t < 1 \quad \leftrightarrow \quad H(f) = \Delta t \cdot \text{SINC}(f \cdot \Delta t) \cdot e^{-j2\pi f \cdot (\Delta t / 2)}$$

és ezzel

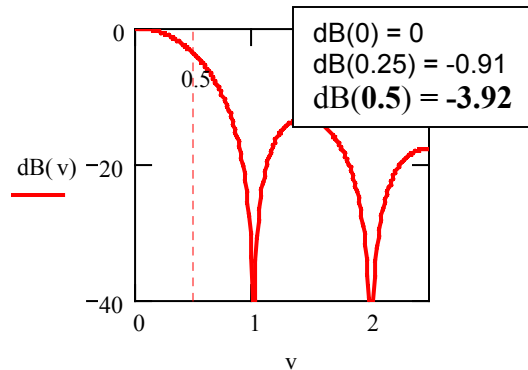
$$u_{ZOH}(t) \quad \leftrightarrow \quad U_{ZOH}(f) = U_s(f) \cdot H(f) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} U\left(f - \frac{i}{\Delta t}\right) \cdot \text{SINC}(f \cdot \Delta t) \cdot e^{-j2\pi f \cdot (\Delta t / 2)}$$

“Burkoló” (roll-off: $\text{SINC}(y) = \sin(\pi y)/\pi y$) típusú spektrum **csillapítás** lép fel, és $\Delta t/2$ **késleltetés**. (Ez utóbbi *szemléletesen* is belátható: ha $u_{ZOH}(t)$ tartott értékeinek közép-pontjait összekötve “rekonstruáljuk” a jelet, akkor az $u(t)$ jel $\Delta t/2$ -vel eltoló változatát kapjuk.)



$$\text{SINC}(v) := \text{if}\left(v \neq 0, \frac{\sin(\pi \cdot v)}{\pi \cdot v}, 1\right)$$

$$\text{dB}(v) := 20 \cdot \log(|\text{SINC}(v)|)$$



Hasonló a számítási eljárás $\tau \leq \Delta t$ tartási idő esetére is.

1.3(b) Periódikus jel idő-skálázása (harmónikus komponensek **sorrend-tartó** és **arányos** át-helyezése az alapsávba: **frekvencia kompresszió**).

Mutassuk meg, hogy egy $f_m = m \cdot (f_s + \delta)$, $m = 1, 2 \dots$ komponensekből álló jelet f_s gyakorisággal (alul)mintavételezve, az alapsávi frekvencia szegmensből az idő-skálázott ($1/\delta$ periódusú) eredeti jelforma visszaállítható.

Lásd a **4.4** feladat megoldását, a feltétel: legyen $m \cdot \delta < f_s/2$.

Példa a „**sorrend-fordító és fázis-invertáló**” (!!) esetre: $f_m = m \cdot (f_s - \delta)$ [$\leftarrow D:=255$] // Mathcad //

Signal: **D := 1** $a_1 := 1$ $a_2 := 0.39$ $a_3 := 0.2$ (amplitude)

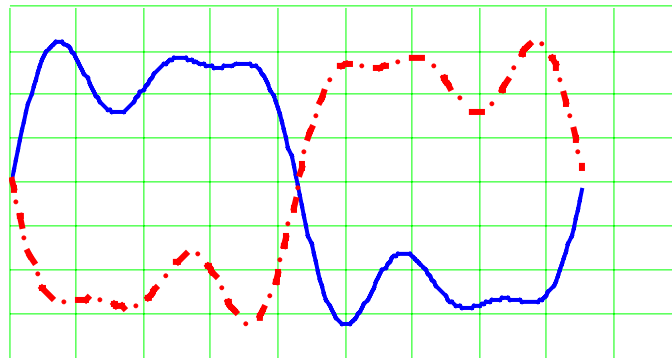
(single period) $p_1 := 0$ $p_2 := 0.3$ $p_3 := -0.5$ (phase)

$$x(t) := \sum_{k=1}^3 a_k \cdot \sin[2 \cdot \pi \cdot D \cdot (2 \cdot k - 1) \cdot t + p_k] \quad \text{(odd harmonics)}$$

sampled version: **N := 256** $\Delta := \frac{1}{N}$ $i := 0.. N - 1$ $s1_i := x(\Delta \cdot i)$

"Negative" alias (from 2nd Nyquist-zone), a time-reversed version: **D := 255**

$$x(t) := \sum_{k=1}^3 a_k \cdot \sin[2 \cdot \pi \cdot D \cdot (2 \cdot k - 1) \cdot t + p_k] \quad s2_i := x(\Delta \cdot i)$$



— signal (s1)
- - - "negative" alias (s2)

Note: for **"positive" alias** change $D = 1$ to **D = 257** (3rd Nyquist-zone)

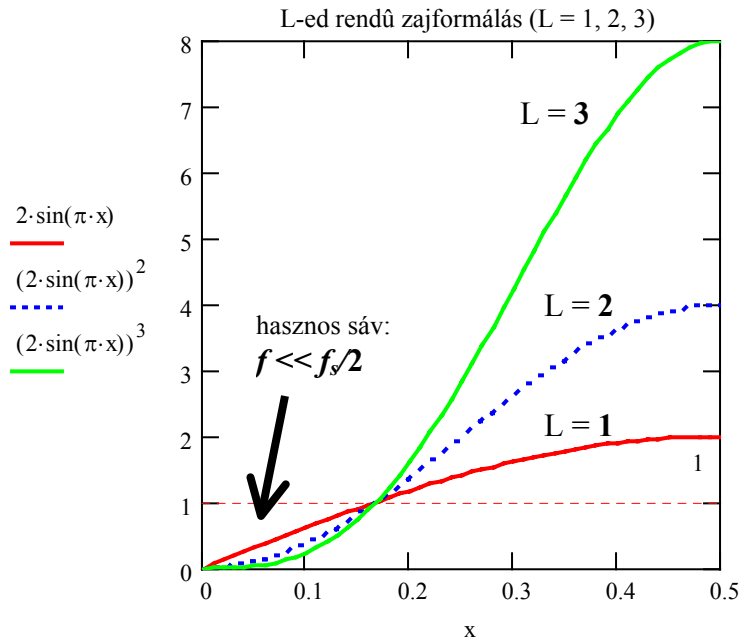
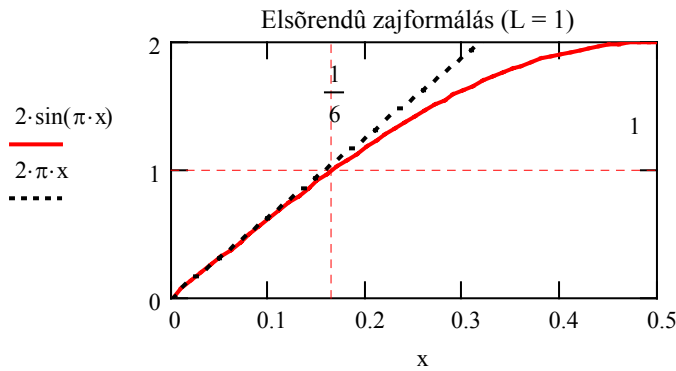
Elemezzük a jelenséget a frekvencia-tartományban is (a fenti adatokkal, $m = 3$)!

2.1 Adjuk meg (részletes levezetéssel) az L - ed rendű zaj-differenciálás transzfer függvényét (és közelítését) a *folytonos idejű* frekvencia tartományban. Ábrázoljuk az értelmezési tartományban **LIN** /és LOG (dB)/ amplitúdó skálával, $L = 1, 2, 3$ paraméterrel. Mit tapasztalunk $f/f_s = 1/6$ esetén?

Az L -ed rendű **zajformálás** (differenciálás) diszkrét idejű transzfer függvénye $NTF(z) = (1-z^{-1})^L$, ahol a késletetési operátor a mintagyakoriság reciproka: $\Delta t = 1/f_s$. A folytonos idejű frekvencia tartományban ($0, f_s/2$):

$$\begin{aligned} \left[NTF(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f \cdot \Delta t}} \right]^L &= \left| 1 - e^{-j2\pi f \cdot \Delta t} \right|^L \\ &= \left| e^{-j\pi f \cdot \Delta t} (e^{j\pi f \cdot \Delta t} - e^{-j\pi f \cdot \Delta t}) \right|^L \\ &= (2 \cdot \sin(\pi f / f_s))^L \\ &\approx (2 \cdot (\pi f / f_s))^L \quad \text{ha } f \ll f_s / 2 \end{aligned}$$

Megjegyzés: $f/f_s = 1/6$ esetén $\sin(\pi/6) = 1/2$.



2.5 n bites, L - ed rendű, M túlmintavételezési arányú zajformáló (DSM).
 Igazoljuk **(a)** a hasznos sávban elérhető 'maximális jel/zaj arány': $SQNR_{\max}[\text{dB}]$ formuláját, és **(b)** a kétféle forma ekvivalenciáját (mekkora K : 'struktúra függő konstans' értéke és mennyi a felbontás-növekmény?)

Feltételezzük, hogy a kvantálási zaj szélessávú, spektrálisan **“fehér”**: $P_Q = (\Delta x)^2 / 12$.

L-ed rendű formálás (differenciálás) után a kvantálási-zaj spektrum

$$S_N(f) = \left(\left[2 \cdot \sin(\pi f / f_s) \right]^L \right)^2 \cdot \frac{P_Q}{f_s / 2} \approx (2\pi f / f_s)^{2L} \cdot \frac{P_Q}{f_s / 2}, \quad f \ll f_s / 2$$

így a zaj-teljesítmény a hasznos sávban:

$$\begin{aligned} P_B &= \int_0^{f_B} S_N(f) df \approx \frac{P_Q}{f_s / 2} \int_0^{f_B} (2\pi f / f_s)^{2L} df = P_Q \cdot \frac{2 \cdot (2\pi)^{2L}}{f_s^{2L+1}} \cdot \left[\frac{f^{2L+1}}{2L+1} \right]_0^{f_B} \\ &= \frac{P_Q}{M^{2L+1}} \cdot \frac{\pi^{2L}}{2L+1} \quad \text{ahol } M = \frac{f_s / 2}{f_B} \quad \text{és} \quad f_B \ll f_s / 2 \end{aligned}$$

Maximális, $X_{FS}/2$ amplitúdójú **szinuszos jel** (teljesítménye: $P = ((X_{FS}/2)/\sqrt{2})^2 = (X_{FS})^2/8$) és **n bites** felbontású **kvantáló** ($\Delta x = X_{FS}/2^n$) esetén a **maximális jel/(kvantálási-)zaj teljesítmény arány**

$$\begin{aligned} SQNR_{\max}[\text{dB}] &= 10 \cdot \log(P / P_B) \\ &= 6 \cdot n + 1.8 + (2L + 1) \cdot 10 \cdot \log(M) - C(L), \quad C(L) = 10 \cdot \log \frac{\pi^{2L}}{2L + 1} \\ &= 6 \cdot \left(n + \left(L + \frac{1}{2} \right) \cdot \log_2(M) - K \right), \quad K = \frac{C(L) - 1.8}{6} \end{aligned}$$

\log : 2-es alapú logaritmus. Praktikusan a M túlmintavételezési arány 2 hatványa, ezért szokás „oktáv” (2x-es) egységben mérni.

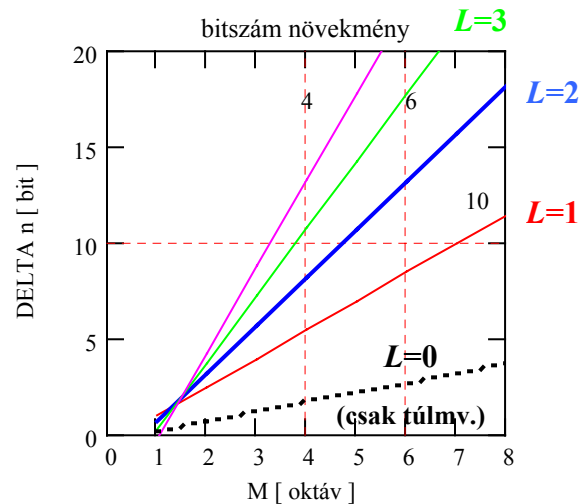
L =	1	2	3	4
C(L) [dB]	5.2	12.9	21.4	30.2
K [bit]	0.6	1.8	3.3	4.7
Δn [M=16=2 ⁴]	5.4	8.2	10.7	13.3
Δn [M=64=2 ⁶]	8.4	13.2	17.7	22.3

ahol

$$\Delta n = \left(L + \frac{1}{2} \right) \cdot \log_2(M) - K \quad [\text{bit}]$$

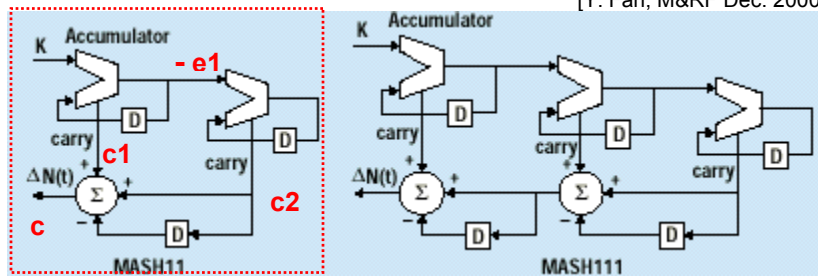
a felbontás max. **bitszám-növekménye** (elvi limit) – a táblázatban rögzített (M=16 → 4 oktáv ill. M=64 → 6 oktáv) túlmintavételezési aránynál.

Megjegyzés: az ábrából is jól látható, hogy nagyobb M értéknél *hatásosabb* L növelése.



3.3 Digitális DSM két, kaskád sémáját vázolja az ábra, ahol D : delay (register), K : a bemenet (multi-bit) és $\Delta N(t)$: a kimenet (data stream); a speciális alkalmazás: 'fractional-N PLL' frekvencia szintézisnél a N.K átlagértékű osztáshoz a változó osztásarányú osztó dinamikus vezérlése

[Y. Fan, M&RF Dec. 2000]



Linearizált kvantáló modellel adjuk meg az ekvivalens topológiákat és a transzfer függvényeket

Útmutatásként (az egyik sémára):

ez a **MASH11** topológia megfelel a **2.3** feladat **1-1MASH**, $L = 2$ kaskád átalakító alapváltozatnak, azzal a különbséggel, hogy itt **(a)** a késleltetés (D) a visszacsatoló ágban van és **módosított** az előjel (lásd jegyzet 31.old), **(b)** a hiba kvantáló (második fokozat) bemenete: **- e1**, így a zaj kioltáshoz (**c2** digitális differenciálása után) összegzés kell.

The method of **fractional-N (FN) synthesis** was introduced in an effort to improve the resolution vs. bandwidth relationship of the classical **PLL** structure by removing the restriction that N be an integer.

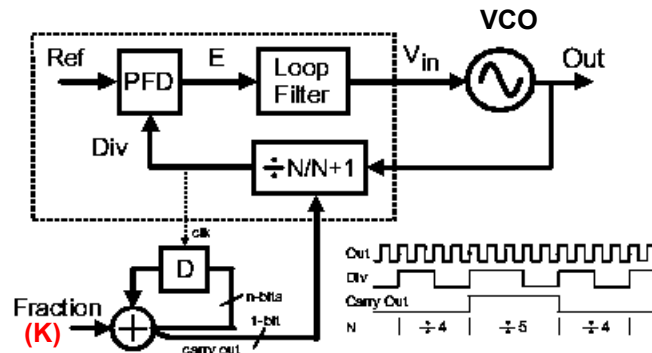
Figure illustrates this technique, and reveals that noninteger N values are produced by dithering between integer values.

[M. Perrot 1997]

PLL: phase locked loop

PFD: phase/frequency detector

VCO: voltage controlled oscillator



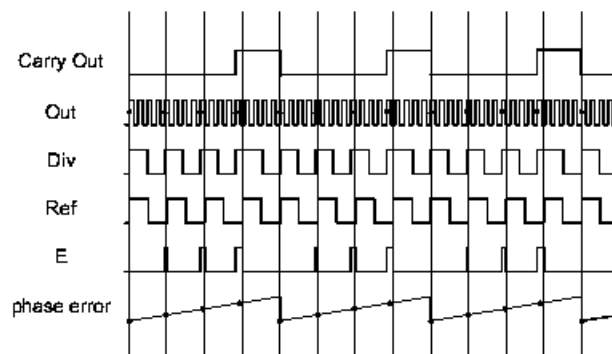
The fractional-N synthesizer architecture.

FN achieves the extra resolution by instantaneously modulating the divider between N and N+1. This duty cycle, which has a value $K/2^n$, determines the fractional value.

The average fractional division ratio

$$N + 0.F = N + K/2^n$$

Note: the main problem of this implementation is the phase perturbation introduced by the programmable frequency divider, when switching from N to N+1.



4.1 n bites, unipoláris **D/A** átalakítónál jelölje $A[i]$ az $N = i$ adathoz tartozó analóg értéket, amely a *közvetlenül* mérhető kimenetből nullapont és skála korrekcióval¹ kapott (normalizált) érték, vagyis $A[0] = 0$, $A[2^n - 1] = U_{FS} - \Delta$ és $\Delta = U_{FS}/2^n$ az átlagos lépésmagyság (az LSB értéke).

Definíció szerint, az **LSB-ben mért** (relatív) **differenciális és integrális linearitási hiba**

$$DNL[i] = \frac{A[i] - A[i-1]}{\Delta} - 1 \quad \text{és} \quad INL[i] = \frac{A[i]}{\Delta} - i$$

Igazoljuk az *ekvivalenciákat* (amelyek az elnevezéseket is indokolják):

$$DNL[i] = INL[i] - INL[i-1], \quad \text{illetve} \quad INL[i] = \sum_{k=1}^i DNL[k]$$

(a DNL az INL-sorozat elsőrendű differenciája; az INL profilt kumulatív DNL alakítja ki).

Mutassuk meg: ha *minden* i -re² $|INL[i]| < 0.5$ vagy ebből következően $|DNL[i]| < 1$, akkor az *adott felbontású* átalakító **monoton**: növekvő bemenetre a kimenet is növekszik. (És ez kritikus pl. pozíció beállítás vagy visszacsatolt szabályozási kör esetén.) Az állítás megfordítva nem áll.

Megjegyzés: gyakori szóhasználat szerint, az INL 'a linearitási hiba' (a relatív pontosság); míg nem-normalizált adatokkal számolt INL 'az abszolút hiba' (TUE: total unadjusted error)

Korrigált adat:

Jelölje $U[i]$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$ az *aktuális unipoláris* D/A adatokat.

Normalizált - vagyis nullapont (offset; **OE**: offset error) és skála (gain; **GE**: gain error) korrekcióval módosított (!) - értékekkel és **LSB (= Δ) egységben** számolunk.

Végpontokra illesztett jellemzésnél az első (min, $N = 0$ bemenet) és utolsó (max, $N = 2^n - 1$) aktuális kimeneti érték adja a (a korrekcióhoz szükséges) hibákat:

$$OE = \frac{U[0]}{\Delta} - 0,$$

$$GE = \left(\frac{U[2^n - 1]}{\Delta} - OE \right) - (2^n - 1) = \left(\frac{1}{\Delta} \frac{U[2^n - 1] - U[0]}{2^n - 1} - 1 \right) \cdot (2^n - 1)$$

ezeket felhasználva, a *korrigált* érték

$$A[i] = (U[i] - OE \cdot \Delta) - \frac{i}{2^n - 1} \cdot GE \cdot \Delta = \left(\frac{U[i]}{\Delta} - OE - i \cdot \frac{GE}{2^n - 1} \right) \cdot \Delta$$

Megjegyzés: szokás közvetlenül a $GE/(2^n - 1)$ értéket "skála hiba"ként tekinteni, és azonnal $A[i]/\Delta$ adatokkal számolni.

Ekvivalencia:

Egyszerű átrendezéssel kapjuk az ekvivalens formákat, pl.

$$DNL[i] = \frac{A[i]}{\Delta} - i + i - \frac{A[i-1]}{\Delta} - 1 = \left(\frac{A[i]}{\Delta} - i \right) - \left(\frac{A[i-1]}{\Delta} - (i-1) \right)$$

Monotonitás:

Ha $|INL[i]| < 0.5$, akkor $-1 < INL[i] - INL[i-1] < 1$. Ebből, vagyis a $|DNL[i]| < 1$ egyenlőtlenségből pedig az következik, hogy

$$\begin{aligned} -1 < \frac{A[i] - A[i-1]}{\Delta} - 1 < 1 &\longrightarrow 0 < A[i] - A[i-1] < 2 \cdot \Delta &\longrightarrow 0 < A[i] - A[i-1] \\ &\longrightarrow A[i] > A[i-1] \end{aligned}$$

tehát növekvő bemenetnél a kimenet is növekszik.

¹a két végpont linearitási hibája zérus: ún. **végpontokra illesztett** ("end-points") jellemzés - ez a konzervatív szemlélet a kalibrált "ipari(mérő)"-átalakítók jellegzetessége (szemben a "kommunikációs"-átalakítók ún. "best-fit (in least-squares)" jellemzésével, vagy az abszolút eltérést minimalizáló "min-max" módszerrel)

² a gyártók rendszerint a max. adatot specifikálják

Példa [U[i] - Wooley, 2001]:

// Mathcad //

$$n := 3 \quad i := 0..2^n - 1 \quad U_{FS} := 8 \quad \Delta := \frac{U_{FS}}{2^n}$$

$$\Delta = 1$$

U :=

	0
0	-0.15
1	1.05
2	1.65
3	2.85
4	4.18
5	4.92
6	6.08
7	7.21

$$OE := \frac{U_0}{\Delta}$$

$$OE = -0.15$$

$$GE := \left(\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{U_{2^n-1} - U_0}{2^n - 1} - 1 \right) \cdot (2^n - 1)$$

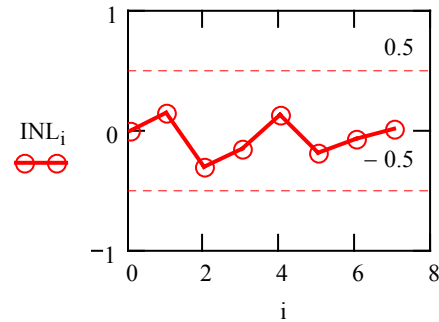
$$GE = 0.36$$

$$\frac{GE}{2^n - 1} = 0.051$$

$$A_i := \left(\frac{U_i}{\Delta} - OE - i \cdot \frac{GE}{2^n - 1} \right) \cdot \Delta$$

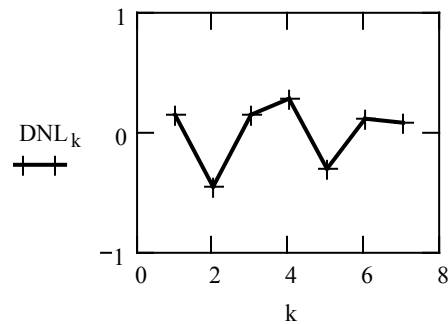
$$INL_i := \frac{A_i}{\Delta} - i$$

i =	A _i =	INL _i =
0	0	0
1	1.149	0.149
2	1.697	-0.303
3	2.846	-0.154
4	4.124	0.124
5	4.813	-0.187
6	5.921	-0.079
7	7	0



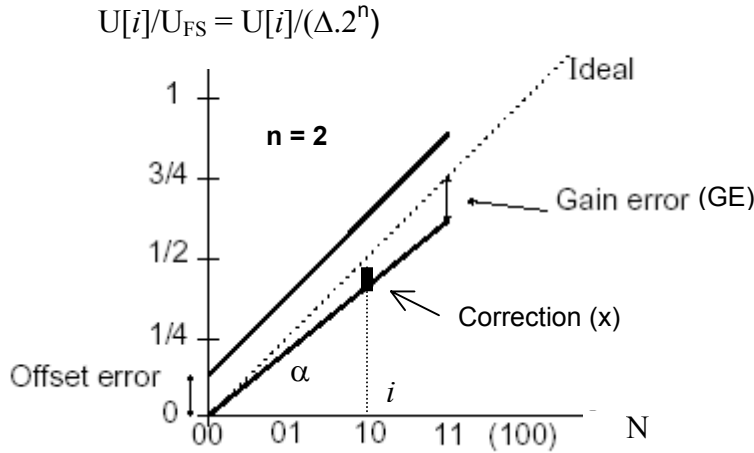
$$k := 1..2^n - 1 \quad DNL_k := \frac{A_k - A_{k-1}}{\Delta} - 1$$

k =	DNL _k =
1	0.149
2	-0.451
3	0.149
4	0.279
5	-0.311
6	0.109
7	0.079



Megjegyzések a korrekcióhoz:

Amíg OE (offset error) minden pont (aktuális D/A kimeneti érték) egyenletes vertikális *eltolódását* eredményezi, addig GE a bemenő *kóddal arányos* vertikális módosulást okoz.



Trigonometrikus összefüggéssel (OE korrekció után és Δ egységben számolva), a bemenő kóddal **arányos** skála korrekció:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{i-x}{i} = \frac{(2^n - 1) - GE}{2^n - 1} \longrightarrow x = \frac{i}{2^n - 1} \cdot GE$$

A linearitási hibák számításához normalizált - nullapont (OE) és skála (GE) korrekcióval módosított - adatokat használunk.

Az *első* INL érték zérus ($\text{INL}[0] = 0$), a második az első DNL értékkel azonos ($\text{INL}[1] = \text{DNL}[1]$), a következő az első két DNL összegével egyezik meg, stb. Az INL a DNL-sorozat kumulatív összege („integrálja”). Az *utolsó* INL érték szintén zérus ($\text{INL}[2^n-1] = 0$).

A DNL az INL-sorozat elsőrendű differenciájaként is számítható (ezért *nincs* DNL[0] adat).

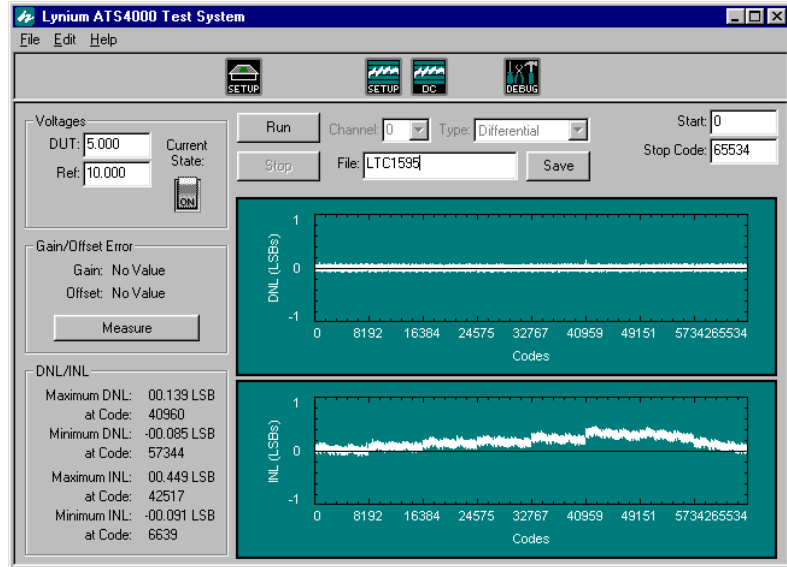
It would be hard to imagine a **16-bit DAC** with better performance than that shown in **Figure**. The LTC1595 has extremely good linearity for a 16-bit DAC, and the result shown in Figure should **not** be taken as representative of all 16-bit DACs.

// There is a mistake in Figure. Can you spot it?

If you can, you know a great deal about DC testing. The mistake does **not** involve the "no value" results shown in the Gain/Offset Error panel. (For these errors, "No Value" is reported because the +10 V reference could not be measured directly by the test setup.)

→The "Stop Code" shown in Figure is incorrect. It should be 65,535 ($2^n - 1$), not 65,534 ($2^n - 2$) //.

[J. Horn, 2001]



4.4 f_s gyakoriságú mintavételezésnél, az $f_h = h \cdot f$, $h = 1, 2 \dots$ harmonikusok átlapolódása az alapsávba (az első Nyquist zónába, **aliasing**) kétféle módon is számítható. Igazoljuk a formulákat!

(a) $\text{mod}(\cdot)$ művelet („hajtogatás”; folding):

$$z_h = \text{mod}\left(\frac{f_h}{f_s}, 1\right) \rightarrow a_h = \text{if}(z_h < 0.5, z_h, 1 - z_h) \rightarrow \text{falias}_h = a_h \cdot f_s < f_s / 2$$

ahol $\text{mod}(a, b)$: a/b osztás maradéka, és $\text{if}(c, t, f)$: ha c (feltétel) igaz, akkor t ; ha c hamis, akkor f .

(b) frekvencia áthelyezés (keverés; beating):

$$k_h = \text{round}\left(\frac{f_h}{f_s}\right) \rightarrow \text{falias}_h = |f_h - k_h \cdot f_s| < f_s / 2$$

ahol $\text{round}(\cdot)$: kerekítés művelet.

Miért "veszélyes", ha a numerikus frekvencia ($f/f_s = J/M$) speciálisan kis egész számok aránya (destructive aliasing)? Lehet-e *hasznos* az átlapolódás jelensége (constructive aliasing)?

Szinuszos jel (single tone) $f_s = 1/\Delta t$ gyakoriságú mintavételezése közvetlenül megmutatja a Nyquist-szabály megsértésének ($f > f_s/2$) következményét.

• Az alapsávba (az első Nyquist-zónába) kerül minden

$$f = k \cdot f_s \pm f_A, \quad f_A < f_s / 2 \text{ és } k = 1, 2, \dots$$

frekvenciájú komponens, mert ezeknek a minta-értékei azonosak (!!)

$$f_A (= \text{falias})$$

komponens mintáival:

$$\begin{aligned} \sin(2\pi \cdot (k \cdot f_s \pm f_A) \cdot t) \Big|_{t=i \cdot \Delta t} &= \sin(2\pi \cdot k \cdot i \pm 2\pi \cdot (f_A / f_s) \cdot i) \\ &= \sin(\pm 2\pi \cdot (f_A / f_s) \cdot i) \end{aligned}$$

A **negatív** előjel **fázis-fordítást**³ jelent. (Ez pl. az FFT *amplitúdó* spektrumban *nem* látszik!)

A $\text{round}(\cdot)$ művelet az ismeretlen k értékét határozza meg, és ezzel a frekvencia transzpozíció:

$$f_A = |f - k \cdot f_s|$$

Megjegyzés: k az „átlapolódás rendje” (order of aliasing), a spektrum képmás(ok) - f_s -re normált - helyét jelöli.

• Más szemlélettel: definíció szerint, a frekvencia a fázis-változással arányos

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \text{ és } \partial t = \Delta t \text{ (minta időköz) alatt } \partial \varphi = \pm \Delta \varphi + k \cdot 2\pi \text{ fázis-változás léphet fel,}$$

ahol $\Delta \varphi < \pi$ (a + és - előjel a lehetséges kétféle elfordulási irányt jelzi a fázis síkon), a szinuszos jel pedig 2π szerint periódikus ($\text{mod } 2\pi$). Ebből

$$\frac{f}{f_s} = \pm \frac{\Delta \varphi}{2\pi} + k = \pm \frac{f_A}{f_s} + k, \text{ és } f_A < f_s / 2$$

vagyis $\partial t = \Delta t$ időközökre az $f = k \cdot f_s \pm f_A$ komponensek fázis-változásai ($\text{mod } 2\pi$), és így a minta-értékek is, azonosak.

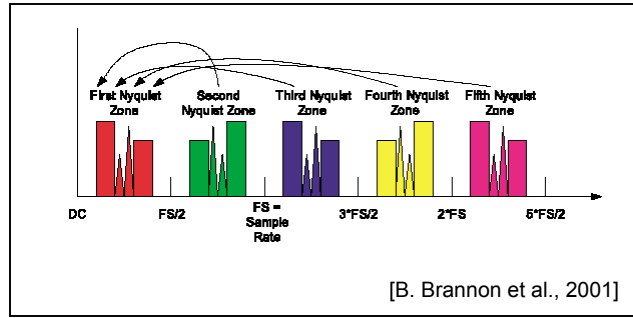
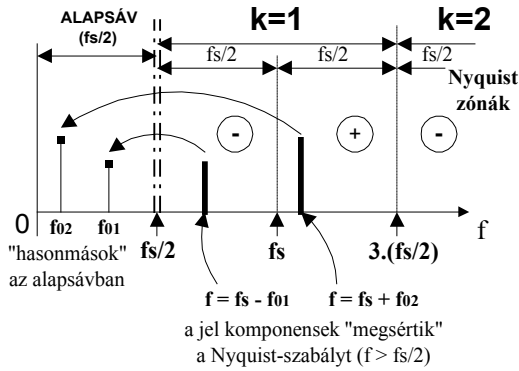
A $\text{mod}(\cdot)$ művelet „választja le” k (egész szám) értékét, az $\text{if}(\cdot)$ művelet az „előjel függést” veszi figyelembe (vagyis azt, hogy a *második* ($z_h > 0.5$): **páros és sorrend-fordító, fázis-invertáló** [-] vagy az első: **páratlan és sorrend-tartó** [+] Nyquist-zónában van-e a komponens).

Praktikusan: $f_s / 2$ sávokra (Nyquist-zónákra) felosztott frekvencia tengelyen

$$\text{egy } f = k \cdot f_s - f_{01} \text{ komponens } f_{01}, \text{ míg egy } f = k \cdot f_s + f_{02} \text{ komponens } f_{02}$$

frekvenciájú komponensként jelenik meg az alapsávban ($f_{0i} < f_s / 2$)

³ $\sin(-x) = -\sin(x)$



Példa: páratlan harmónikusok átlapolódása
(a numerikus frekvencia kis egész számok aránya: 7/32)

// Mathcad //

sinusoid frequency $f := 7 \cdot \text{KHz}$ ODD harmonics $h := 1, 3..15$ $f_h := h \cdot f$
 sampling rate $f_s := 32 \cdot \text{KHz}$

1st method: mapping by **mod()** operation

Nyquist zones **(1, 2)** lines in the 1st Nyquist zone

$$z_h := \text{mod}\left(\frac{f_h}{f_s}, 1\right) \quad a_h := \text{if}\left(z_h < \frac{1}{2}, z_h, 1 - z_h\right) \quad f_{\text{alias}_h} := a_h \cdot f_s$$

2nd method: translating by "**mixing** (beating)" process

position of images (order of aliasing) lines in the 1st Nyquist zone

$$k_h := \text{round}\left(\frac{f_h}{f_s}\right) \quad f_{2\text{alias}_h} := |f_h - k_h \cdot f_s|$$

$h =$	$f_h =$ KHz	$z_h =$	$f_{\text{alias}_h} =$ KHz	$f_{2\text{alias}_h} =$ KHz	$k_h =$	signal
1	7	0.21875	7	7	0	
3	21	0.65625	11	11	1	
5	35	0.09375	3	3	1	
7	49	0.53125	15	15	2	
9	63	0.96875	1	1	2	
11	77	0.40625	13	13	2	
13	91	0.84375	5	5	3	
15	105	0.28125	9	9	3	

[overlapped harmonic structure]

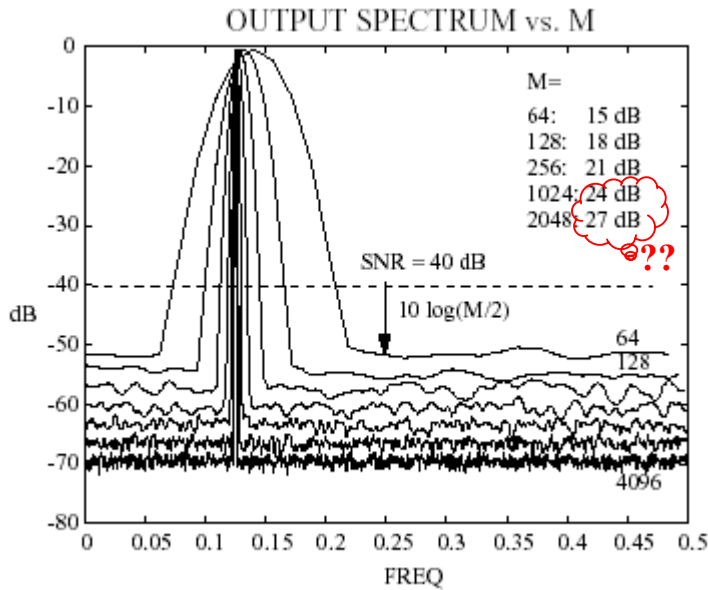
There is a massive **overlapping** if f/f_s is ratio of small integers. Here the periodicity of samples is $N = 32$, hence frequencies will **duplicate** as index h takes on all odd values above $h = 15$.

A hasonló (alias) jelenség kihasználására, példaként, lásd az **1.3** feladatot.

4.5 (b) Egyszerű "trükk" a jel/zaj arány vizuális becslésére: $M = 2^m$ pontszámú adat-rekord FFT ábrájából "szemrevételezéssel" a zaj-küszöb értéke (azaz egy zaj "vonal" átlagos jel/zaj aránya) $\approx Z$ [dB], ebből SNR [dB] $\approx Z - 3 \cdot (m-1)$. Igazoljuk az eljárást!

Legyen P_n egy átlagos „zaj-vonal” teljesítmény, így a teljes zaj-teljesítmény: $\sum P_n = (M/2) \cdot P_n$, a

jel/zaj arány pedig $SNR[dB] = 10 \cdot \log\left(\frac{P_s}{\sum P_n}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{P_s}{P_n}\right) - 10 \cdot \log\left(\frac{M}{2}\right) = Z[dB] - 10 \cdot (m-1) \cdot \log 2$



[T. Rahkonen, 2001]

Another way of looking at this is to consider the FFT itself. The FFT result is actually the output of a group of digital bandpass filters. As the data set is doubled, the width of the filter is reduced by 1/2, and the average noise power within that filter's bandwidth falls by 3 dB. However, the total power remains the same.

I find that the most confusing aspect of the noise floor calculation is to remember to **subtract one** from **m**.

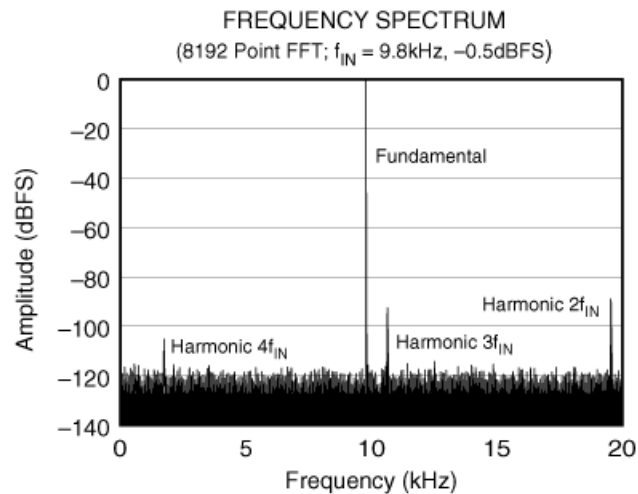
If you look at **Figure**, you can see that the "average" noise floor is around -123 dB. Since the spectrum is based on an **8K FFT**, the noise floor is 36 dB lower than the converter's SNR, which must be **-123dB + 3dB * (13 - 1)**, or around 87 dB.

Actually, the converter's SNR is slightly better than this at around 89 dB.

However, the FFT plot has been done with a fairly thick line width, and this somewhat hides the fact that the average noise floor is slightly lower than shown in Figure.

Still, getting within 2 dB via a simple trick is not bad.

[J. Horn, 2000]



Frequency Spectrum of a 16-bit, 40 kHz ADC Digitizing a 9.8 kHz Input signal

5.7 Hasonlítsuk össze az 1 bites modul használó ciklikus (R^2 : részmaradékokat recirkuláló) **A/D** (\rightarrow hiba kétszerezés) és a SAR **A/D** (\rightarrow referencia felezés) struktúráját (n bit). Mennyi a numerikus minta előállításához szükséges órajel ütem-szám? Lehet-e SAR A/D esetén *közvetlenül* soros adat-kimenetet előállítani?

(a) SAR A/D (\rightarrow referencia felezés): a **k-adik** bit (b_k) előállítását meghatározó feltétel

n-karakteres párhuzamos D/A átalakító

$$0 < x - \underbrace{\sum_{j=1}^n b_j \cdot \left(\frac{X_{FS}}{2^j}\right)}_{\text{D/A átalakító}} \quad \text{ahol} \quad b_j = \begin{cases} (b_j)^*, j = 1, 2, \dots, (k-1) & \text{ismert(!)} \\ b_k = ? : 1 \rightarrow 0 \\ 0, j = (k+1), \dots, n & \text{(!)} \end{cases}$$

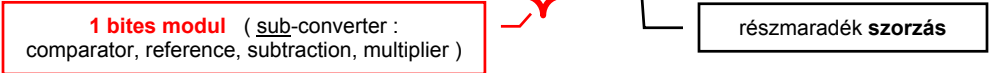
a részmaradék képzés magja **n-bit**es párhuzamos **D/A** átalakító.

A **D/A** átalakítót vezérlő **adat-regiszter** (SAR) a kiindulásnál **előírt** tartalmú és **meghatározott karakterkeresési algoritmust** követ (lásd b_j), **különbségképzés** és **nulla-komparálás** művelet adja - minden egyes bit-beállítást („teszt”) követően - a döntési információt.

A lépések **száma**: n. A soros adat-kimenet is „természetesen” előáll.

(b) Ciklikus (R^2 : részmaradékokat recirkuláló) A/D (\rightarrow hiba kétszerezés): részmaradék (x_k) szorzással és **fokozatos** részmaradék képzést használva, **egyetlen 1 bites modul ismételt** (ciklikus) felhasználásával is generálható a mérőszám, az **MSB**-vel (b_1) kezdve

$$2^{k-1} \cdot x_k = 2^{k-1} \cdot \left(x - \sum_{j=1}^{k-1} (b_j)^* \cdot \left(\frac{X_{FS}}{2^j}\right) \right) = \left(\left(\left(x - b_1 \cdot \frac{X_{FS}}{2} \right) \cdot 2 - b_2 \cdot \frac{X_{FS}}{2} \right) \cdot 2 - \dots - b_{k-1} \cdot \frac{X_{FS}}{2} \right) \cdot 2$$

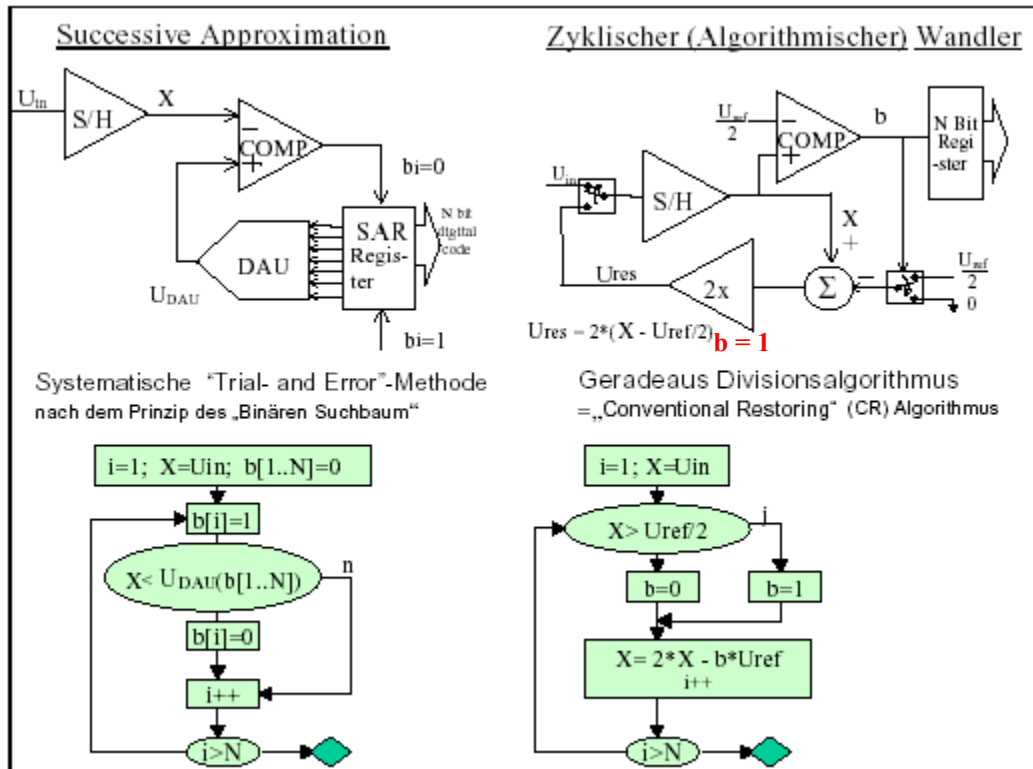


Természetesen, a keletkező részmaradékokat **tárolni kell** (!!) a következő bit-iterációhoz. (Erre pl. alkalmas a 2x erősítő – kapcsolt kapacitás realizálással.)

A lépések **száma**: n. Közvetlenül **csak** soros adat-kimenet van.

SAR- und zyklischer **ADU** (= Analog-Digital Umsetzer [Wandler])

// **DAU** = Digital-Analog Umsetzer//



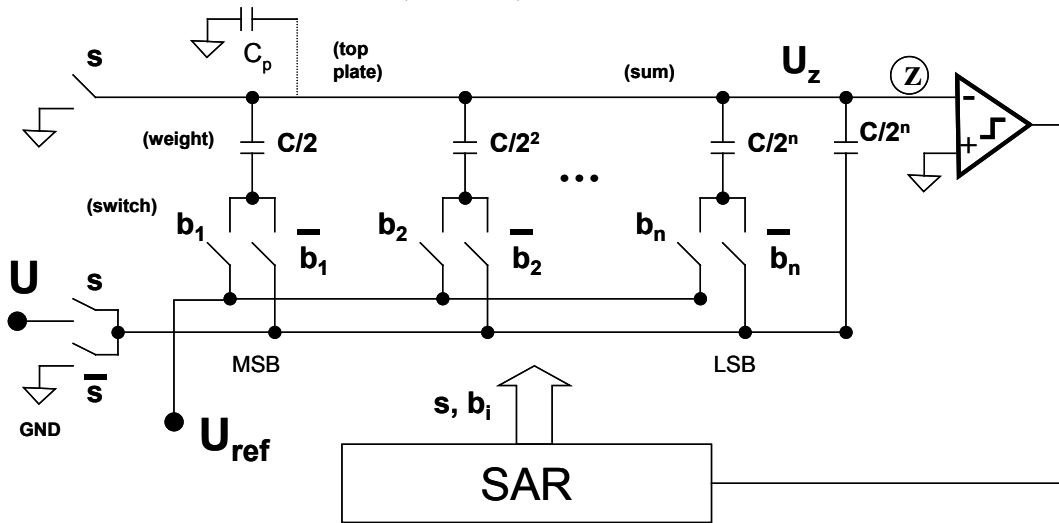
[R. Kindt et al., 2001]

Példa:

fokozatos érték-közelítésű A/D, kapacitív D/A felhasználásával (charge redistribution SAR ADC)

- unipoláris bemenet: $0 \leq U < U_{ref}$,
- n bites felbontás: $b_i = 0,1 \quad i = 1,2 \dots n$,
- binárisan súlyozott kapacitások: $C_i = C/2^i$, ezek a bemeneti (U), a föld (GND) ill. a referencia (U_{ref}) potenciálra kapcsolhatók, és az össz-kapacitás értéke:

$$C_{TOT} = \left(\sum_{i=1}^n C/2^i \right) + C/2^n = C$$



Mintavétel (bemenetre kapcsolt C_{TOT})

$s = 1$ (s : zárt és \bar{s} : nyitott), $U_z = 0$ [V]; $b_i = 0, \quad i = 1,2 \dots n$ (\bar{b}_i : zárt és b_i : nyitott), az össz-kapacitás ($C_{TOT} = C$) a bemenő feszültségre töltődik:

$$Q = C \cdot U$$

Tartás (töltés megtartással földre kapcsolt C_{TOT})

$s = 0$ (\bar{s} : zárt és s : nyitott), a változatlan $b_i = 0, \quad i = 1,2 \dots n$ értékek zérus potenciálra kötik a kapacitásokat; mivel az össz-töltés változatlan ($Q = -Q_z$), ezért $U_z = -U$ [V]

Konverzió (SAR algoritmus - töltés átrendezéssel realizált súlyozott U_{ref} és $-U$ összegzés, és feszültség [potenciál] előjel indikálás nulla komparálással)

- Az **első** lépés MSB (b_1) teszt: $b_1 = 1$ (b_1 : zárt és \bar{b}_1 : nyitott), a többi bit változatlanul $b_i = 0, \quad i = 2,3 \dots n$. Az MSB kapacitásra kapcsolt U_{ref} feszültség csak az U_z potenciál értékét módosítja:

$$\begin{aligned} (Q =) -C \cdot U &= (C - C/2) \cdot U_z + C/2 \cdot (U_z - U_{ref}) & \rightarrow & U_z = -(U - (U_{ref}/2)) \\ &= C \cdot U_z - C/2 \cdot U_{ref} \end{aligned}$$

Ha $U > U_{ref}/2$, akkor $U_z < 0$ és a komparátor logikai 1 értéket ad, ennek megfelelően $(b_1)^* = 1$ (b_1 : zárt marad) az aktuális bit érték.

Ha $U < U_{ref}/2$, akkor $U_z > 0$ és logikai 0 értéket indikál a komparátor, amely módosítja az aktuális bit értéket: $(b_1)^* = 0$ (\bar{b}_1 : zárt és b_1 : nyitott), az MSB kapacitás visszakapcsolódik zérus potenciálra (és ez marad az iteráció következő lépéseiben).

- A **második** lépésben a $C/2^2$ kapacitásra kapcsolunk U_{ref} feszültséget, és i. t.

- A **k-adik** lépésnél tehát már ismertek a megelőző k-1 lépésben meghatározott, aktuális $(b_i)^*$, $i = 1, 2 \dots k-1$ bit értékek, ezek a C_i , $i = 1, 2 \dots k-1$ kapacitásokat U_{ref} vagy zérus potenciálra kapcsolják. Általánosan, a k-adik lépésben a töltés megoszlás:

$$(Q=) - C \cdot U = (C - \sum_{i=1}^k C_i) \cdot U_z + \sum_{i=1}^k C_i \cdot (U_z - b_i \cdot U_{ref}), \quad b_i = (b_i)^*, \quad i = 1, 2 \dots k-1$$

$$b_k = 1,$$

$$= C \cdot U_z - \sum_{i=1}^k C \cdot b_i \cdot U_{ref} / 2^i$$

tehát a döntéshez (nulla komparáláshoz) kialakult U_z potenciál értéke:

$$U_z = - \left(U - \sum_{i=1}^k b_i \cdot \frac{U_{ref}}{2^i} \right),$$

valóban a részmaradék képzéshez szükséges **párhuzamos D/A** funkció valósul meg, amely egyben a **mintavevő** szerepét is betölti (!) és a **különbségképzés** is „benne van”.

Ha $U_z < 0$, akkor „kell ez a bit”: $(b_k)^* = 1$ (**b_k : zárt marad**); ha pedig $U_z > 0$, akkor az aktuális bit érték $(b_k)^* = 0$ (visszaváltás - **\bar{b}_k : zárt**).

- Az **utolsó, n-edik** lépésben, az LSB (b_n) teszt után, U_z “igen közel” kerül a zérus potenciálhoz.

Megjegyzések:

1. a C_p parazita kapacitás csak a feszültség komparálás viszonyait rontja (potenciál csillapítás), de *nem* módosítja az A/D funkciót!
2. pl. az utolsó $C/2^n$ értékű kapacitást a **tartás (és konverzió)** fázisban GND helyett $-U_{ref}/2$ potenciálra kapcsolva, $+1/2 \cdot \Delta x$ eltolás (**half-LSB offset**) valósítható meg – lásd **5.6(d)** feladat