Mérőszám, mértékegység, mérési bizonytalanság

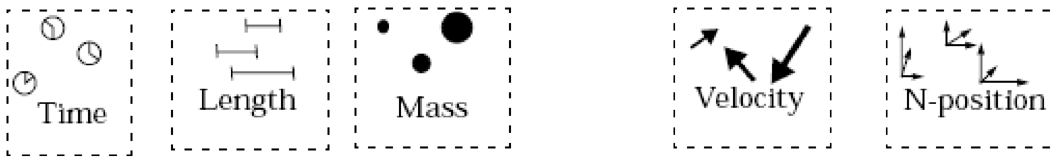
Mérés: *ahol a (természet)filozófia és a matematika összeér.*

Műszer: *ahol találkozik a valóság és a tudás.*

A mérés nem gondolatkísérlet.

A **mérés** gyakorlati, kalibrált eszközt használó, objektív művelet, amely megadja egy jól definiált (mérendő) mennyiség ismeretlen nagyságának relatív (ismert egységhez viszonyított) értékét (ún. **egység-alapú** paradigma). A mérés: *arány* „felfedezése” – összehasonlítással. Csakis *egynemű* mennyiségek hasonlíthatók össze.

Skalár (nagyság) Vektor (nagyság és irány)



Az ’anyagmennyiség (amount of stuff, QoM: quantity of matter)’ pl. megadható mint tömeg (vas), térfogat (víz), terület (szőnyeg), hossz (kötél), számosság (molekulák) – fontos tehát tudni, hogy ’mit is mérünk’ (milyen ’anyagról’ van szó)!

A mérés-szó eltérő jelentésű [lehet] a különböző tudományágakban; a szubjektív ítélet-alkotások (felmérések: szavazás, teszt-válasz, véleményalkotás) a „mérés” elnevezéssel annak igazoló / jósló erejét kívánják eljárásuknak tulajdonítani.

A mérőeszköz nem varázsdoboz, amely „csak úgy” kidob egy számot.

A **mérőszám** a mérendő mennyiség relatív nagyságának ’matematikai tükörképe’. A (mérő)számot az egység értelmezi „szimbolikus szorzat”formájában. (Ez az ’ártatlan’ formula jó néhány ’körmönfont’ feltételezést rejt, aminek feltárásával [→ méréselmélet] indokolható, hogy ’vannak dolgok, amik nem mérhetők’, pl. szépség.)

A reprezentáló szám lehetővé teszi, hogy számítással helyettesítsünk gyakorlati manipulációt (pl. „mekkora polc kell adott számú, ’megmért [ismert] vastagságú’ könyv-höz?”). Ez nem „szám-misztika” és nem hasonlítható a régi kultúráknak a „nevek mágikus erejébe” vetett hitéhez.

A mértékegységet nem mérjük.

A **mértékegység** definiált érték, nincs „igazság” kritériuma, csak használhatósága és validitása. Az egység a mérendő mennyiséggel egynemű, célszerűen kiválasztott, fix érték.

Az egység-használat történelmileg jóval megelőzte a mennyiségek formális fogalmának, majd a méréselméletnek a kialakulását. (’Nem tudták, de tették.’)
Előfordul, hogy különnemű mennyiségeknek azonos elnevezésű (de persze eltérő jelentésű!) az egysége, pl. *fok* [º] (síkszög ill. hőmérséklet).

A mérőszám az egységtől függ, egység-váltással megváltozik ugyan a (mérő)szám, mégis ugyanazt a mért értéket jelenti.

Csakis *egynemű* mennyiségek *azonos egységű* mérőszámai adhatók össze.

A mérési bizonytalanság (régebben: hiba) nem azt jelenti, hogy érvénytelen / rossz / elvetendő a mért érték.

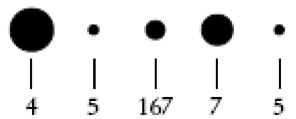
Az elkerülhetetlen **mérési bizonytalanság** egy szűk (jól becsülhető) intervallum: az a mért érték körüli tartomány, amelyen belül van („szinte biztosan”, nagy valószínűséggel) a mérendő értéke. Ez az adat nélkülözhetetlen **része** a mérési eredménynek, és ismeretünk korlátozott (becsülhető pontosságú) voltát jelenti.

A mérőeszköz nem „varázsdoboz”, ami „csak úgy” kidob egy számot.
A *mérőszám* a (mérendő)mennyiség relatív nagyságának ’numerikus tükörképe’.

Mennyiség nagyságának reprezentálása számmal

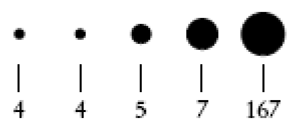
Mennyiségek nagyságának és a (reprezentáló) számoknak a struktúra-*azonossága* (az empirikus [konkrét] és numerikus [absztrakt] tartományok között relációk/műveletek *összekapcsolása*) a közvetlen mérés elvi alapja. Illusztratív példa:

(a) Összehasonlítva a **TÖMEG**eket, az **eltérő** nagyságúakat *eltérő* számokkal jelöljük, de – magától értetődően – ha két tömeg **azonos** nagyságú (pl. az összehasonlításhoz használt kétkarú mérleg egyensúlyban van), akkor *ugyanazt* a számot rendeljük hozzá:



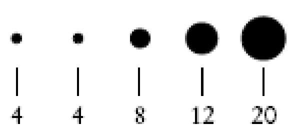
Az nem tűnik megfelelő választásnak, hogy a legnagyobb szám *nem* a legnagyobb tömeget jelöli, viszont van információ arról, hogy vannak azonos nagyságú tömegek. A számok itt csak elkülönítik, *megjelölik* a különböző tömegeket (mint pl. a futball játékosokat a mez-számok, ahol persze egy csapaton belül *nincsenek azonos* számok).

(b) Rendezzük nagyság szerint (az összehasonlítás alapján) a tömegeket, és a **nagyobb** tömeghez *nagyobb* számot rendeljünk:

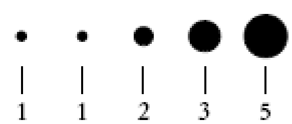


Itt a számok már *jól tükrözik* a nagyság szerinti azonosságot (egyenlő) és az eltérést (nagyobb/ kisebb), de a számok még *nem* adják meg a tömegek helyes *arányát* – tehát még nem használtunk ki minden lehetőséget, ami a „számokban rejlik”: *hányszor* nagyobb az egyik tömeg a másiknál (pl. „láthatóan” az első két tömeg fele a harmadiknak).

(c) Kombináljuk a tömegeket, és ha – a rendezett sorban – egyik tömeg két másik (fizikai) **egyesítése**[1]**/együttese** (pl. azokat kétkarú mérleg azonos serpenyőjébe tesszük), akkor – logikusan – olyan számot rendeljünk hozzá, amely a két összetevőhöz rendelt szám (matematikai) *összege* (itt a harmadiktól kezdve az előző kettő összege):



vagy



Így már *helyesen reprezentálják* a számok a nagyságok egyenlőségét, eltérését és arányát is. A jobboldali ábrán, ahol pl. a legkisebb tömeg nagyságának értékét **egység**nek *választottuk*, a számok **mérőszám**ok, vagyis a (mérő)szám és (mérték)egység *szorzata* a tömeg **mért érték**e. (A baloldali ábrán az egység értéke az előbbi negyede.)

A relációk itt *közvetlenül* „felfedezhetők” (pl. kétkarú mérleg egyensúlyban van, ha az első két tömeget az egyik, a harmadikat pedig a másik serpenyőbe tesszük). A nagyságok **arányai** *függetlenek* a választott egységtől, ez a „relatív mennyiségek állandóságának” törvénye. A **MÉRÉS** adja meg az *ismeretlen* nagyság értékét (*ismert* egységhez viszonyított arányát).

[Ábrák: T. Sider, Properties (2011)]

---

[1] Csak óvatosan az anyag-választással (nehogy robbanás vagy tűz lépjen fel)

A matematikában, logikában van IGEN/NEM, a *méréstechniká*ban csak: TALÁN.
Ezért jellemezni kell a mérés minőségét is (*korrekt-e* az eredmény).

Mérési bizonytalanság

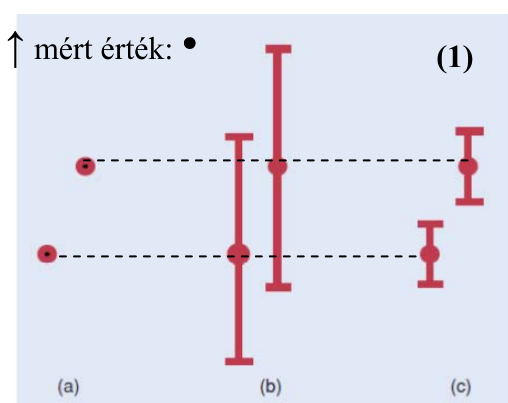
A mért érték és a mérendő aktuális értékének eltérése (különbsége) a (mérési) hiba[1], és kis *hiba* nagy *pontosság*ot jelent: azt **minősít**ik, hogy a két adat „mennyire van közel egymáshoz”, mennyire „megbízható” a mérés. A hiba megadásához persze tudni kell(ene) az aktuális értéket – de ha azt ismernénk, miért is mérnénk?!

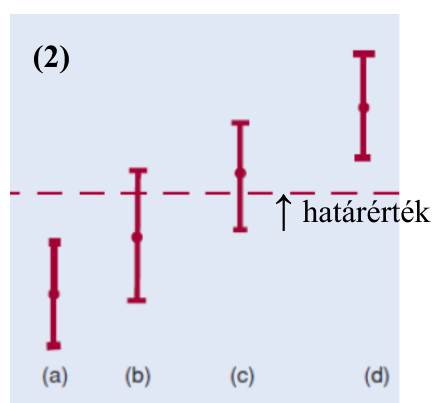
Az aktuális értéket a mért érték közelíti, ennek a „korlátozott ismeretnek” a **mérték**ére becslés a *mérési bizonytalanság* (ami tehát nem teljes bizonyosságú, de nagy megbízhatóságú adat) és megadásához nem kell ismerni az aktuális értéket!

A mérési bizonytalanság meghatározásának nemzetközileg elfogadott, szabványos technikája van (**GUM**: Guide to the expression of Uncertainty in Measurement), amelynek az a filozófiája, hogy először azonosítja és modellezi az összes fontos összetevőt, elvégzi a lehetséges korrekciót, majd statisztikai vagy más tapasztalati módszerrel *becsli* az eredő **mérési bizonytalanság**ot: azt a **mért érték körüli tartományt (intervallumot)**[2], amelyen *belül* van („majdnem biztosan”, nagy *valószínűség*gel) a mérendő aktuális (de persze ismeretlen, exakt) értéke. Ez a specifikáció ad *bizalmat* az eredmény iránt: minél kisebb (szűkebb tartományú) a *bizonytalanság*, annál nagyobb (több, pontosabb) a *tudás*unk a mérendőről.
„Csakis annak a mérésnek van bizonytalansága, amelyikét meghatározták.”

Két példa (miért is fontos a mért értékhez társított mérési bizonytalanság):

(1) Különböző mérőeszközökkel mért adatok összevetésénél, csak a bizonytalansági intervallum **(„hiba-sáv”)** megadásával – tehát (b) és (c) esetben – dönthető el, hogy a mért értékek közötti eltérés szignifikáns-e (c), avagy az átlapolódás miatt, ekvivalensnek tekinthető-e a két adat (b).





(2) Határérték komparálásnál (Go/NOgo): az (a) és (d) eset teljesen egyértelmű, míg a (b) és (c) eset „elfogadható” (accept) vagy „elutasítható” (reject) – függően a döntés egyéb feltételeitől (pl. életvédelem, gazdaságosság, ár…)[2].

---

1 Vigyázat: „mérési hiba (error)”, és *nem* meghibásodás (mistake),
a „(mérési) bizonytalanság” szakkifejezés, és *nem* a köznapi/naiv értelemben vett jelentésű

2 „±1 hibakorlát”, biscuit1, biscuit2

Megjegyzés:
A „miért is mérnénk, ha a mérendő aktuális értékét ismernénk” kérdésre speciális válasz: ha hitelesítjük[3] / kalibráljuk[4] a mérőeszközt, akkor *ismerjük* a mérendőt. Ez a minősítési, mérési bizonytalanságot „feltérképező” (vagy csak néhány paramétert beállító) folyamat történhet közvetlenül a mérés előtt, vagy stabil eszköz esetén korábban – szabályos időközönként is, esetleg külső szakértő / akkreditált[5] labor igénybevételével.

Szemléletes hasonlattal élve: ugyanaz a helyzet, mint amikor koncert előtt a zenekar tagjai referencia hanghoz igazítva „behangolják” (zenei)eszközeiket, kivéve pl. a zongorát (amit korábban, ha szükséges, egy szakértő hangol).

[Ábra: A. Majcen, Accred Qual Assur (2009)]

---

[3] Az eszköz **hitelesítése** során a *mérésügyi hatóság* műszaki vizsgálattal ellenőrzi és tanúsító jellel és/vagy hitelesítési bizonyítvánnyal igazolja, hogy az eszköz megfelel a hitelesítési engedélyében foglalt követelményeknek.
A *joghatással járó* mérés csak a mérési feladat elvégzésére alkalmas **hiteles** mérőeszközzel (hiteles anyagmintával), vagy használati etalonnal **ellenőrzött** mérőeszközzel lehet végezni.
(Joghatással jár a mérés, ha annak eredménye az állampolgárok és/vagy jogi személyek jogát vagy jogi érdekeit érinti, különösen, ha a mérési eredményt mennyiség és/vagy minőség tanúsítására - a szolgáltatás és ellenszolgáltatás mértékének megállapítására - vagy hatósági ellenőrzésre és bizonyításra használják fel; továbbá az élet- és egészségvédelem, a környezetvédelem és a vagyonvédelem területén.)

[4] A **kalibrálás** (*nem* hatósági tevékenység) azoknak a műveleteknek az összessége, amelyekkel (meghatározott feltételek mellett) megállapítható az összefüggés a mérőeszköz vagy a mérőrendszer *értékmutatása*, illetve a mérendő mennyiségnek mértékkel vagy anyagminta által *megtestesített*, vagy használati etalonnal *megvalósított* (aktuális) értéke között.

[5] minőség-hitelesített

„A mérés célja a *bizonyosság*,
de legalább is a bizonytalanság csökkentése."

ALAPEGYENLET: ADDITÍV MODELL (HÁROM EKVIVALENS ALAK)

Abszolút hiba: *H*

$$\boxed{x + H = N \bullet \Delta x}$$

x: *ismeretlen* mérendő, **A**nalóg (folytonos) **jel**
H: abszolút hiba, csak tartománya becsülhető, aktuális értéke *ismeretlen*
N: (meg)ismert mérőszám, EGÉSZ szám, **D**igitális (diszkrét) **adat**
Δx: ismert (választott) mértékegység

A **MÉRT ÉRTÉK**: $\boxed{m = N \bullet \Delta x}$, és a szorzás (•) *formális*, ha a mért érték *megjelenítés* (digitális kijelzés = display) a cél, azt **tizedespont és dimenzió** megadása helyettesíti; *valóságos*, ha pl. beavatkozó *jel*ként kell a mért érték, azt fizikai eszköz: **D/A átalakító** valósítja meg; x, H, Δx egynemű (és azonos dimenziójú) mennyiségek.

Példák (mért érték megjelenítés): $f = \boxed{92.1\ \mathrm{MHz}}$ (vagyis a mérőszám $N = 921$, $\Delta f = 0.1$ MHz = 100 kHz a *legkisebb helyérték* értéke [a mérték*egység*] és M = 10^6, k = 10^3 ún. prefixum); $u = \boxed{0.05\ \mathrm{V}}$ ($N = 5$, a vezető nullákat *nem* mértük, $\Delta u = 10$ mV és m $=10^{-3}$).

Kérdés: $N = 25$ és $\Delta t = 10$ ns (n = 10^{-9}) esetén $t = \boxed{?}$ (display)

Hibaterjedés: *összeadás és kivonás* műveletnél az abszolút hibák összegződnek. (Elvileg a hibák „kiejthetik" egymást, de ezt *nem* tudjuk!)[1] Csakis egynemű, azonos mértékegységű mennyiségek adhatók össze.

Példa: $x_1 = 23 \pm 0.3$ cm és $x_2 = 17 \pm 0.3$ cm, ezzel $x_1 + x_2 = 40 \pm 0.6$ cm

Relatív hiba: *h*

$$\boxed{x \cdot (1 + h) = m}, \quad \text{ahol} \quad h = \frac{H}{x} \approx \frac{H}{m}, \quad \text{mert} \quad h << 1 \text{ (azaz } x \approx m\text{)}$$

Szokásosan a relatív hibát **%-ban adjuk** meg (h•100); az egyenletben h nem % értékben szerepel!

Hibaterjedés: *szorzás és osztás* műveletnél a relatív (%-os) hibák összegződnek. (Eltekintünk a másodrendű kicsiny tagtól, vagyis a hiba hibájától.)[1]

Példa: $s = 15$ m, 2% és $t = 5$ s, 1% − ezekkel az adatokkal $v = s/t = 3$ m/s, 3%. (Megjegyzés: 3% esetén $h = 3 \cdot 10^{-2} = 0.03 << 1$.)

Szám hiba: *c*

$$\boxed{\left(\frac{x}{\Delta x}\right) + c = N}, \quad \text{ahol} \quad c = \frac{H}{\Delta x} \quad \text{és} \quad \mathbf{min}\ \ |\mathbf{c}| < \mathbf{1/2}$$

A mérés *arány* „felfedezése" (pontosabban: az EGÉSZ rész, a mérőszám megadása − az egységgel történő összehasonlítással), az ezt megvalósító fizikai eszköz: **A/D átalakító**, ami tehát osztást realizál.

Jellegzetes a ±1 hibakorlát ($|c| < 1$), amely pl. „kapuzott esemény-számlálás" (időtartam ill. frekvencia mérés) esetén lép fel.

---

[1] Csak hibakorlát becsléseket tekintünk.

Az alapegyenlet jól szemlélteti, hogy egy folytonos mennyiség nagyságát megadó *valós* arány csak *diszkrét* számként: **mérőszám**ként ismerhető meg, amit az előzetesen kiválasztott, mesterséges nagyság: a mérték*egység,* és a becsült *hiba-sáv* értelmez!

A szám egyedül *nem* mérési eredmény és *van* mérési bizonytalanság. Különösen digitális kijelzésnél, pontosnak hihetjük a mért értéket, valójában ennek környezetében van (mégpedig a hiba-sávnak megfelelően) a mérendő aktuális értéke.

A mérésnek (az egységgel történő összehasonlításnak) egyik – de csak egyik! – rész-művelete lehet a 'számlálás', mint pl. „kapuzott esemény-számlálás" (időtartam ill. frekvencia mérésnél). A mérés referenciája egynemű (és azonos dimenziójú) a mérendő mennyiséggel. Egység-váltás lehetséges, az „új" mérőszám ugyanazt az értéket jelenti (pl. 72 km/h = 20 m/s).

Ezzel szemben, a diszkrét entitások (elemi részek, részecskék /pl. levegő szennyezettség/, objektumok, események, …) **darabszám**a közvetlen (le)számlálással adódik (tehát nincs elméleti, csak esetleg gyakorlati probléma), vagyis a számosság értéke pontos[2] és megvan a maga sajátos, természetes *egység*e: az '1' szám (1 entitás[3], ami *nem* osztható).

A közvetlen számlálás tehát nem ekvivalens a méréssel.

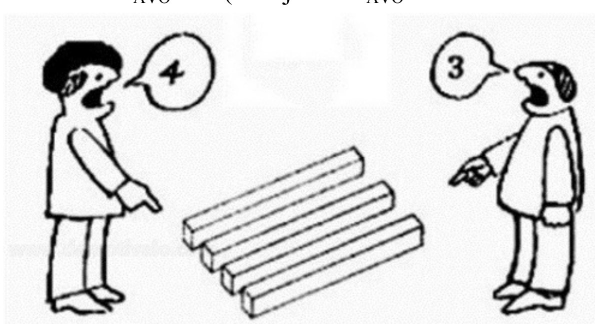
A (le)számlálás (vagyis a számosság) *bizonyosság*a[4] és a mérés *bizonytalanság*a a diszkrét entitás és a folytonos mennyiség különbözőségét tükrözi.

---

[2] Feltéve, hogy nem extrém nagy számosságról van szó.
Például a kémia használja a (makro- és mikro-világot összekötő) $N_{\mathrm{AVO}} \sim 6\cdot 10^{23}$ „egység-csomagot".

[3] Tekinthető tehát akár *dimenziós* mennyiségként is (a makroszkópikus minta számossága), a dimenzió: „ent" (az entitás *egység*e, konkrét esetben: pcl = number of particles, mcl = number of molecules, cnt = counts, cyl = cycles, …).

Ebben az értelmezésben: 1 mol = N_{AVO} ent. (Valójában N_{AVO} konverziós faktor.)



Megjegyzés (az extrém nagy számú *diszkrét* entitás *folytonos* mennyiségként való értelmezéséhez / észleléséhez): ha van érzékelhető különbség egyetlen (vagy néhány) entitás hozzáadásával, akkor az számosság, ha nincs, akkor nagyság. Mint például a *homokdomb-paradoxon* esetén: egyetlen vagy néhány (sőt több) homokszem még biztosan nem domb, de egy ponton túl (extrém sok homokszemnél) már igen. Kérdés persze: hol van ez a pont?

[4] Igen nagy értékű számosság esetén már valós a hiba lehetősége (pl. stadion beléptetésnél kettős számlálás vagy kihagyás), és így akár adható (többnyire szubjektív becsléssel) bizonytalanság hozzárendelés.