

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Villamosmérnöki és Informatikai Kar Híradástechnika Tanszék

Handbauer Tamás

# TROMBITA WAVEGUIDE MODELLEZÉSE

KONZULENS

Rucz Péter

Híradástechnikai Tanszék BUDAPEST, 2012

# Tartalomjegyzék

Kivonat	5
Abstract	6
1 Bevezetés	7
2 A trombita fizikája	8
2.1 A trombita mint rezgő rendszer	8
2.1.1 A hangtér	8
2.1.2 Véges hosszúságú hullámvezetők	11
2.1.3 A reflexiós tényező	
2.2 Különböző trombitamodellek	
2.2.1 A hengeres hullámvezető	13
2.2.2 Az egyenletesen táguló kúpos (kónikus) cső	13
2.2.3 Az exponenciálisan táguló cső	14
2.2.4 Tetszőleges görbe szerint táguló cső	14
2.3 Fizikai jelenségek a trombitajátékban	15
2.3.1 Az alaphang meghatározása és az átfújás	
2.3.2 Hangközök kifejezése fizikai mennyiségekkel	15
2.3.3 A gerjesztő nyomás	
2.4 A trombita felépítése és realizációja	
3 A waveguide modell	19
3.1 A waveguide módszer elmélete	19
3.2 A waveguide modell megvalósítása	
3.2.1 A legegyszerűbb modell	
3.2.2 Reflexiók beiktatása	
3.2.3 Lezáró impedancia	21
3.3 A modell hibája	23
4 A modell vizsgálata	26
4.1 Bemeneti impedancia számítása	
4.2 Inharmonicitás számítása	
4.3 A trombitaszelepek hatása	
4.4 Időtartománybeli működés	
5 A gerjesztés modellezése	

6 Összefoglalás		
7 Köszönetnyilvánítás	35	
Irodalomjegyzék		
Függelék		
F1. A központi kód		
F2. Átmérőt számoló kód	40	
F3. Inharmonicitást számoló kód	41	
F4. Levine és Schwinger eredményeit átskálázó kód	41	
F5. Lezáró impedancia szűrőt létrehozó kód	42	

# HALLGATÓI NYILATKOZAT

Alulírott **Handbauer Tamás**, szigorló hallgató kijelentem, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, csak a megadott forrásokat (szakirodalom, eszközök stb.) használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a forrás megadásával megjelöltem.

Hozzájárulok, hogy a jelen munkám alapadatait (szerző(k), cím, angol és magyar nyelvű tartalmi kivonat, készítés éve, konzulens(ek) neve) a BME VIK nyilvánosan hozzáférhető elektronikus formában, a munka teljes szövegét pedig az egyetem belső hálózatán keresztül (vagy hitelesített felhasználók számára) közzétegye. Kijelentem, hogy a benyújtott munka és annak elektronikus verziója megegyezik. Dékáni engedéllyel titkosított diplomatervek esetén a dolgozat szövege csak 3 év eltelte után válik hozzáférhetővé.

Kelt: Budapest, 2012. 12. 07.

Handbauer Tamás

# Kivonat

A számítógépek teljesítményének növekedésével és a numerikus számítási eljárások térnyerésével új irányt vett az akusztikus hangszerek vizsgálata, modellezése, és új lehetőségek nyíltak meg a hangszintézis előtt is. Az egyik ilyen eljárás a waveguide (hullámvezető) módszer. Szakdolgozatomban ennek segítségével olyan diszkrét idejű modellt hoztam létre, amelyben egy trombita tengelyszimmetrikus hangszertestében kialakuló kétirányú hullámterjedést késleltetőkkel és reflexiókat végrehajtó elemekkel valósítottam meg.

Ennek elengedhetetlen feltétele a trombita fizikai és zenei működésének átfogó ismerete, és a waveguide modellalkotás megismerése, elsajátítása. Ezek alapján létrehoztam saját trombitamodellemet, melyet a szükséges kiegészítésekkel láttam el: modelleztem a hangszertest keresztmetszeti változásának hatásait, a sugárzási impedanciát és a reflexiót is. Megvizsgáltam a modell közelítésének hibáját, majd időés frekvenciatartománybeli analízisnek vetettem alá. Dolgozatomban külön foglalkozom a bemeneti impedanciával, és kitérek a modell inharmonicitására is, mely a hangminőség jellemzése miatt fontos. Valamint megvizsgálom, hogy a trombita szelepeinek milyen hatása van a trombita fizikai paramétereire, működésére. Végül összehasonlítom az eredményeimet a szakirodalomban már publikált értékekkel és kifejtem egy pontosabb gerjesztésmodell elméleti hátterét is.

A dolgozatban bemutatására kerülő módszerek és eredmények a trombita működésének jobb megértését, illetve a fizikai modellen alapuló hangszintézis megvalósítását segítik elő.

# Abstract

As the efficiency of computing has increased and new numerical methods have become worldwide, modeling and analysis of musical instruments and sound synthesis have developed rapidly. One of these methods is the waveguide method, which has allowed me to create a discrete time model representing the two way wave propagation in the trumpet tube using delay and reflection elements.

It is neccessary to acquire the knowledge of the physical and musical behavior of the trumpet and waveguide modeling. These have allowed me to create my own trumpet model with the requisite additions: the diameter changes of the body of the instrument, the radiation impedance and also the reflection. I have investigated the inaccuracy of the model, and made time and frequency domain analyses. I have paid elevated attention to the input impedance and the inharmonicity of the model, which characterizes the quality of the trumpet's sound. I have investigated the effects of the valves on the trumpet's physical parameters and working mechanism. Finally, I have compared my results with the literatures'. I have paid attention to a theoretical background of modeling the blowing pressure.

The published methods and results of this paper can result in a better understanding of the behavior of the trumpet and creating the physical model-based sound synthesis.

# 1 Bevezetés

A ma ismert hangszerek évszázadok alatt érték el jelenlegi formájukat, hangzásukat. Ez idő során a hangszerkészítők alapvető fizikai paraméterekkel (rezonátorok geometriájával, sípok hosszával, húrok anyagi jellemzőivel, stb.) kísérletezve alakították ki az emberi fül számára kellemes felhangsorokat.

Napjainkban, a számítógépek teljesítményének növekedésével és a numerikus számítási eljárások térnyerésével új irányt vett az akusztikus hangszerek vizsgálata, modellezése és a hangszintézis is. Az egyik ilyen eljárás a waveguide (hullámvezető) módszer, mely a tengelyszimmetrikus hangszertest egydimenziós leképezésén alapul. Dolgozatomban a waveguide módszerrel létrehozott trombitamodell felépítését, tulajdonságait ismertetem és elemzem.

Az első lépés a modellezéshez a trombita működési elvének megismerése: a fizikai alapok elsajátítása mellett fontos a hangszer hangját befolyásoló tényezők feltárása, illetve a modell szempontjából kevésbé lényeges elemek leegyszerűsítése. Dolgozatomban kitérek a különböző trombitamodellek egyes fizikai paramétereire (pl. bemeneti impedancia), melyek a szakirodalomban jól dokumentáltak, így biztos összehasonlítási alapnak tekinthetők.

Munkámban áttekintem а waveguide módszer alapjait, működési mechanizmusát és felépítését. A trombita waveguide modelljének MATLAB környezetben történt elkészítése segítségével mutatom be a modellt és annak kiegészítő elemeit is (pl. lezáró impedancia). A trombitamodell jellemzésében kiemelten foglalkozom a bemeneti impedanciával, melynek létjogosultságát fizikai interpretációja adja: segítségével nemcsak a trombita alaphangjának magasságát állapíthatjuk meg, de belőle meghatározhatók a sajátfrekvenciákhoz tartozó jósági tényezők és a hangszer inharmonicitása is. Kitérek a numerikus közelítés hibájára is. Külön foglalkozom a trombita gerjesztésével, ennek elméleti alapjaival és realizációjával. Végezetül a kapott eredményeket a szakirodalomban már publikált értékekkel vetem össze.

A dolgozatot záró összefoglalóban az elért eredményeket, megszerzett tapasztalatokat, illetve a modell további bővítési lehetőségeit összegzem.

# 2 A trombita fizikája

### 2.1 A trombita mint rezgő rendszer

A trombita és a hangszeren játszó trombitaművész együtt egy akusztikus rezgő rendszert alkotnak. A trombitaművész szája közvetlen kölcsönhatásban van a levegő molekuláival. Mikor játék közben rezgeti az ajkait, a kialakuló nagyobb és kisebb légsűrűségű helyek nyomáshullámok formájában szállítják a rezgésállapotot a cső nyitott vége felé, ahol fellép a reflexió jelensége: a levegő molekulái által szállított energia egyik része kijut a térbe, másik része visszaverődik, majd a jelenség ismétlődésével kialakul a trombita hangszertestében az állóhullámú hangtér. A gerjesztett trombita hangjának előállításában elsősorban a hangszer hosszának és alakjának, azaz akusztikus hullámimpedanciájának, valamint a cső végi reflexiós tényezőnek, vagyis a lezáró impedanciának van szerepe. E jellemzőket együttesen a frekvenciafüggő bemeneti akusztikai impedanciafüggvény foglalja magába. A hangszín ugyanakkor kisebb mértékben, de függ a hangszerfal vastagságától és anyagi jellemzőitől is.

### 2.1.1 A hangtér

A hangszer testében kialakuló hanghullámokat bármely pontban a hangnyomással  $(p(\mathbf{x},t))$  és a térfogatsebességgel  $(U(\mathbf{x},t))$  jellemezhetjük. Mindkettő a hely és idő függvénye, tehát a rezgő légoszlop elosztott paraméterű rendszerként tárgyalható.

#### 2.1.1.1 A hangnyomás

A hangszertest egy adott pontjában kialakuló légnyomás két részből tevődik össze: az állandó légköri nyomásból és a hangnyomásból:

$$P(x,t) = P_0 + p(x,t).$$
(2.1)

A normál légköri nyomás állandónak tekinthető, értéke megközelítőleg 103 kPa. [1] A zenei információt a hangnyomás, a "váltakozó komponens" hordozza, így a továbbiakban ezzel foglalkozunk. Az időben harmonikusan változó hangnyomást a csőben az alábbi módon írhatjuk le:

$$p(\mathbf{x},t) = p(\mathbf{x}) \cdot e^{j\omega t}, \qquad (2.2)$$

ahol $\omega$  a harmonikus rezgés körfrekvenciája.

#### 2.1.1.2 A hullámegyenlet

A hangnyomáshullám terjedését a térben és időben általánosan az akusztikai hullámegyenlet írja le, mely levezethető a tömeg- és momentummegmaradás törvényeinek linearizált alakjából, valamint az adiabatikus változásokat leíró állapotegyenletből. Ennek általános alakja:

$$\Delta p(\mathbf{x},t) = \frac{1}{c^2} \ddot{p}(\mathbf{x},t). \tag{2.3}$$

A fenti hullámegyenlet egydimenziós alakjának megoldását tetszőleges, kétszer deriválható függvények adják [1]:

$$p(x,t) = p^{+}(ct - x) + p^{-}(ct + x).$$
(2.4)

Tehát a megoldás egy adott pontban az x tengely mentén pozitív és negatív irányban c sebességgel terjedő hullámok szuperpozíciójaként adódik.

#### 2.1.1.3 A Helmholtz-egyenlet

A hullámterjedést harmonikus esetben a Helmholtz-egyenlet írja le, melynek általános, homogén alakja:

$$\Delta p + k^2 p = 0, \tag{2.5}$$

ahol k a hullámszám, mely adott frekvenciájú szinuszos hullámra a körfrekvencia és a hullámterjedési sebesség aránya [2].

A hangnyomáshullám a hangszertestben levő légoszlopban terjed, és mivel esetünkben a trombita teste hengerszimmetrikus, kihasználhatjuk annak szimmetriatulajdonságait. Hengerkoordináta-rendszerben írjuk fel a Helmholtzegyenletet:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k^2 p = 0, \qquad (2.6)$$

ahol  $p(r, \theta, x)$  a hangnyomás a csőben. Az egyenlet általános megoldása:

$$p(r,\theta,x) = J_n(k_r r) \cos(n\theta) \left[ p^+ e^{-jk_x x} + p^- e^{jk_x x} \right],$$
(2.7)

ahol a  $J_n(k_r r)$  Bessel-függvények sugárirányban adják a Helmholtz-egyenlet megoldását. Az egyenletből kiolvasható, hogy érintőirányban harmonikus függvények, hosszirányban pedig a tengely mentén pozitív és negatív irányban terjedő síkhullámok írják le a hullámterjedést, melyek amplitúdójának szuperpozíciója adja a cső adott pontjában a hangnyomás értékét.

Zenei szempontból annak a frekvenciatartománynak van jelentősége, ahol még nem jelennek meg a Bessel-függvények szélsőérték-helyeiből fakadó, zeneileg rendszertelenül belépő keresztirányú módusok, ezért a trombita tárgyalásakor egy úgynevezett kritikus, más néven vágási frekvencia alatt vizsgálódunk [1].

### 2.1.1.4 A térfogatsebesség

A térfogatsebesség a v(x,t) részecskesebesség és a rá merőleges S(x) keresztmetszet szorzata a csőben. Így az U(x,t) térfogatsebesség magába foglalja a cső keresztmetszetét tartalmazó információt az x pontban:

$$U(x,t) = \frac{Sp(x)}{\rho c} e^{j\omega t},$$
(2.8)

ahol $\rho$  a levegő átlagos sűrűsége, és c a hullámterjedés sebessége.

#### 2.1.1.5 Az akusztikus hullámimpedancia

Az akusztikus hullámimpedanciát a hangnyomás és a térfogatsebesség arányával definiálhatjuk, így az alábbi összefüggés szerint határozható meg:

$$Z_0(x) = \frac{p(x,t)}{U(x,t)} = \frac{\rho c}{S(x)}.$$
(2.9)

Az akusztikus hullámimpedancia tehát fordítottan arányos az x-től függő keresztmetszettel.

#### 2.1.1.6 A Webster-egyenlet

A Webster-féle differenciálegyenlet írja le a változó keresztmetszetű hullámvezetőben terjedő nyomáshullámokat síkhullámú, időben harmonikus esetben [1]:

$$\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right) + k^2 p = 0, \qquad (2.10)$$

ahol S(x) a cső keresztmetszete. Azzal a feltevéssel élve, hogy a hangnyomás állandó a hullámfronton, a differenciálegyenlet szeparálhatóvá válik. A Webster-egyenlet megoldása a hullámvezető geometriájától függ: egy r(x) szerint változó sugarú kürt esetén a megoldás felírható a  $\psi(x)$  hullámfüggvény bevezetésével:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(k^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\right) \psi = 0.$$
(2.11)

Legyen az F(x) tágulási függvény

$$F(x) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$
(2.12)

Ha  $k^2 > F(x)$ , akkor a Webster-egyenlet megoldása haladó hullám, ha viszont  $k^2 < F(x)$ , akkor a megoldást exponenciálisan csökkenő, úgynevezett evaneszcens hullámok adják. Ez azt jelenti, hogy csak egy

$$\omega = \sqrt{\frac{F(x)}{c^2}} \tag{2.13}$$

vágási frekvencia fölött terjednek hullámok a cső tengelye mentén [2].

### 2.1.2 Véges hosszúságú hullámvezetők

Ha a hullámvezető véges hosszúságú, a terjedő nyomáshullám véges időben éri el annak végét, ahol reflexió következik be, és egy ellentétes irányú nyomáshullám indul meg a csőben. A cső adott pontjában a hangnyomás a pozitív és negatív irányba haladó hullám komplex amplitúdójának szuperpozíciójaként adódik[2]:

$$p(x,t) = \left(Ae^{-jkx} + Be^{jkx}\right)e^{j\omega t},\tag{2.14}$$

ahol A és B a két ellentétes irányú hullám amplitúdója. Hasonlóan határozható meg a térfogatsebesség is:

$$U(x,t) = \frac{S}{\rho c} \left( A e^{-jkx} - B e^{jkx} \right) e^{j\omega t} .$$
(2.15)

A csövet lezáró impedancia szabad csővég esetén a végtelen tér akusztikus impedanciájával egyezik meg. Ezt sugárzási impedanciának hívjuk, és az akusztikai térnek a rezgő légoszlopra ható terhelését jellemezzük vele. A sugárzási impedancia a cső végén a hangnyomás és térfogatsebesség arányából számítható. Ha a cső h hosszúságú, akkor a sugárzási impedancia az x = h pontban:

$$Z_t = \frac{p(h,t)}{U(h,t)}.$$
 (2.16)

A sugárzási és akusztikus hullámimpedanciákból a cső fizikai tulajdonságainak ismeretében a bemeneti impedancia már számolható, melyet a 2.2.1-4. pontokban részletezek.

### 2.1.3 A reflexiós tényező

A hangnyomás és térfogatsebesség az egydimenziós hullámegyenletből a peremfeltételek ismeretében határozható meg. Ilyen peremfeltétel a hangszertest nyitott vagy zárt vége. Zárt vég esetén a sugárzási impedancia a végtelenhez tart, és a reflexiós tényező az 1 értéket veszi fel:

$$r = \lim_{Z_t \to \infty} \frac{Z_t - Z_0}{Z_t + Z_0} = 1,$$
(2.17)

ahol  $Z_0$  az akusztikus hullámimpedancia. Ez azt jelenti, hogy teljes a visszaverődés. Nyitott vég esetén a frekvenciafüggő reflexiós tényezőt és sugárzási impedanciát a frekvenciatartományban írhatjuk fel:

$$R(f) = \frac{Z_t(f) - Z_0}{Z_t(f) + Z_0}.$$
(2.18)

### 2.2 Különböző trombitamodellek

A kezelhető trombitamodell összeállítása érdekében szükséges néhány egyszerűsítéssel élni.

Az első ilyen a hangszertestre vonatkozik. Azzal a feltételezéssel élek, hogy a hangszer teste tökéletesen merev, vagyis a viszkózus és termikus veszteségeket elhanyagoljuk (a hangszertest nem vesz át sem mozgási, sem hőenergiát, így adiabatikus modellel élünk) [2]. Ez azt is jelenti, hogy ebben a modellben a hangszer teste nem sugároz le hangot, amely a trombita esetén nem jelent jelentős elhanyagolást: ugyan számos hangszer van, amelynél a hang lesugárzásában elsősorban a hangszertestnek van szerepe (pl. gitár, vonósok, ütősök), azonban a fúvós hangszereknél a hangszertestben levő levegőoszlop rezgésének tovaterjedése kelti a zenei hangot.

A következő egyszerűsítés az, hogy a cső egy adott szeletén a hangnyomást állandó nagyságúnak feltételezzük. Vagyis egy adott szeleten belül úgy tekintünk a terjedő nyomáshullámra, mint síkhullámra. A szimmetria kihasználásával így a térbeli hullámterjedést egydimenziós problémává redukálhatjuk. Azonban, mivel a csőben kialakuló hullámfrontok merőlegesek a falra, a trombitacső tágulásának konstans átmérőjű szakaszokkal történő lépcsőzetes közelítése a diszkretizálás finomságától függő hibát visz be a rendszerbe.

További egyszerűsítés a periodikus gerjesztés feltételezése: ez azt jelenti, hogy a Fourier-tétel értelmében, ha a gerjesztés periodikus, előállítható különböző frekvenciájú és amplitúdójú szinuszhullámok szuperpozíciójaként. Ugyan a trombitaművész játéka során tranziens és egyéb időbeli változások történnek (különböző dinamikák játszása, hangszínek változása, átfújás, zenei kifejezőeszközök megformálása, a játék egyenetlenségei), ezektől a modell elbonyolódása miatt eltekintünk.

### 2.2.1 A hengeres hullámvezető

A trombita testének legegyszerűbb realizációja egy mindkét végén nyitott, egyenes cső. A modell hasonló viselkedést mutat egy villamos távvezetékhez, ahol a feszültség és áram a nyomásnak és térfogatsebességnek feleltethető meg, és amelyben a lezáró impedancia a sugárzási impedancia párja. Az analógia érvényes a bemeneti impedancia számolására is. Ha a sugárzási impedancia (lezáró impedancia)  $Z_t$ , az akusztikus hullámimpedancia  $Z_0$ , a cső hossza h és a hullámszám k, akkor a bemeneti impedancia:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_t + Z_0 j \tan(kh)}{Z_0 + Z_t j \tan(kh)}.$$
(2.19)

#### 2.2.2 Az egyenletesen táguló kúpos (kónikus) cső

A valóságot jobban közelíthetjük, ha az egyenes helyett olyan csövet veszünk, amely átmérője a cső vége felé haladva a tengely mentén a cső szájától mért távolsággal arányosan nő. Ha a cső szája és vége  $S_1$  és  $S_2$  keresztmetszetű, és *h* a cső hossza, akkor az alábbi módon számolhatjuk ki a bemeneti impedanciát [2]:

$$Z_{in} = \frac{\rho c}{S_1} \left[ \frac{j Z_t \frac{h - \theta_2}{\sin(k\theta_2)} + \frac{\rho c}{S_2} \sin(kh)}{Z_h \frac{\sin(k(h + \theta_1 - \theta_2))}{\sin(k\theta_1) \sin(k\theta_2)} - \frac{j\rho c/S_2}{\sin(k(h + \theta_1))/\sin(k\theta_1)}} \right],$$
(2.20)

ahol  $k\theta_1 = \tan^{-1}(k/x_1)$  és  $k\theta_2 = \tan^{-1}(k/x_1)$ . A cső szájának és végének a kúp csúcsától mért távolsága  $x_1$  és  $x_2$ .

### 2.2.3 Az exponenciálisan táguló cső

Ebben az esetben a toroknyílás felé haladva a keresztmetszet a bemeneti nyílástól mért távolság exponenciális függvénye, így leírható  $a_x = a_0 e^{(mx)}$  alakban, ahol  $a_0$  a kezdeti átmérő,  $a_x$  pedig a bemenettől számított x távolságban levő csőszelet átmérője, m pedig a cső tágulását leíró állandó. A bemeneti impedancia exponenciális kürtök esetén [2]:

$$Z_{in} = \frac{\rho c}{S_1} \left[ \frac{Z_t \cos(bh+\theta) + j(\rho c/S_2) \sin(bh)}{jZ_t \sin(bh) + (\rho c/S_2) \cos(bh-\theta)} \right], \tag{2.21}$$

ahol  $b^2 = k^2 - m^2$  és  $\theta = \tan^{-1}(m/b)$ .

Még az exponenciálisan táguló csővel sem írhatjuk le a trombita egészét, hiszen az bonyolultabb geometriájú a való életben, így szükséges egy tetszőleges tágulási görbét leíró függvény felírása.

#### 2.2.4 Tetszőleges görbe szerint táguló cső

Ahhoz, hogy tetszőleges tágulási görbét leírhassunk, fel kell osztanunk a trombita csövét elegendően sok (N darab), elegendően kicsi (L hosszúságú), egyenes csődarabra, melyekhez egyetlen adatot párosítunk, a cső aktuális átmérőjét. Nagy N érték esetén tetszőleges tágulási görbét közelíthetünk.

Egyetlen elemi csőszakasz hullámimpedanciája ( $Z_0$ ) számolható. Az utolsó, *N*edik csőszakasz végén a  $Z_t$  sugárzási impedancia a lezárás. A trombita végétől visszafelé haladva csődarabról csődarabra számolhatjuk az egész trombitadarab bemeneti impedanciáját. Ha az első csőre  $Z_{01} = \rho c/S_1 = 4\rho c/a_1^2 \pi$ , az *i*-edikre  $Z_{0x} = \rho c/S_i$  $= 4\rho c/a_i^2 \pi$ , ahol  $\rho$  a levegő sűrűsége a csőben, *c* a hang terjedési sebessége,  $S_i$  az *i*-edik csődarab keresztmetszete és *a* az átmérője, továbbá mindegyik csődarab egyenként *L* hosszú, akkor az *N*-edik csődarab elején a bemeneti impedanciára a távvezetékanalógiából az alábbi egyenletet kapjuk:

$$Z_{in_N} = Z_{0N} \frac{Z_t + Z_{0N}j \tan(kL)}{Z_{0N} + Z_t j \tan(kL)}.$$
(2.22)

Az *i*-edik csődarabra alkalmazva:

$$Z_{in_i} = Z_{0i} \frac{Z_{i+1} + Z_{0i}j \tan(kL)}{Z_{0i} + Z_{i+1}j \tan(kL)},$$
(2.23)

ahol k a hullámszám.

A trombitamodell jobban közelíti a valóságot, ha egyenes csőszakaszok helyett lineárisan vagy exponenciálisan táguló csőszakaszokat feltételezünk. Ilyenkor az *i*-edik elem lezáró impedanciát az *i*+1-edik lezáró impedanciából és az *i*-edik elem hullámimpedanciájából számoljuk a (2.20) és (2.21) képletek segítségével.

A trombitamodellben a cső falára egyenes és lineáris (kónikus) közelítést is alkalmazok, a kétféle módszerrel nyert eredményeket összevetem dolgozatomban.

## 2.3 Fizikai jelenségek a trombitajátékban

### 2.3.1 Az alaphang meghatározása és az átfújás

A trombitaművész a levegő áramlásának sebességét befolyásolva képes különböző módusokon megszólaltatni a hangszert. A trombita felhangsorában az első módus zeneileg értelmetlen, ezért a művész játéka során kikerüli azt, és átfújással a második módustól kezdve szólaltatja meg a hangszert. A trombita alaphangját ezért a második módus frekvenciájának feleként határozzuk meg.

Ha az átfújással gerjesztett módus az alaphang frekvenciájának 3/2-szeresénél helyezkedik el, akkor kvinttel, ha kétszeresénél, akkor oktávval, és ha 5/2-szeresénél, akkor oktáv+nagyterccel lesz magasabb a trombita hangja. Ha a trombita nincs tisztára hangolva, ezekhez a módusokhoz nem a megfelelő frekvenciaértékek tartoznak, és a kialakuló zenei hangközök hamisak lesznek.

### 2.3.2 Hangközök kifejezése fizikai mennyiségekkel

A hangközök egyes pszichoakusztikailag kiemelt fontosságú frekvenciaarányt jelölnek. A modernkori trombiták egyenletesen temperált hangolásúak, azaz a 2/1 frekvenciaarányú oktávot 12 egyenlő hangközre bontjuk fel, így definiálva a kisszekundot, mely a  $\sqrt[12]{2}$  frekvenciaarányt képviseli. A többi hangköz ezekből épül fel, így lesz például a tiszta kvint frekvenciaaránya  $\sqrt[12]{2}^7 = 1,4983 \approx 3/2$ .

Pontosabb leírását kapjuk a hangközöknek, ha centekben adjuk meg őket. Egy cent a kisszekund századrészének felel meg. Egy tetszőleges  $f_2/f_1$  frekvenciaarány kifejezhető centekben [1]:

$$1200 \log_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$
 [cent]. (2.24)

### 2.3.3 A gerjesztő nyomás

Fletcher [3] kutatásai szerint minden trombitahang kifújásához létezik egy gerjesztő nyomás intervallum, melyben az a hang megszólaltatható. Magasabb hang esetén nagyobb az a minimális és maximális hangnyomásérték, mely között a hang játszható. Fletcher mérései során egy profi játékos a trombita alaphangját közel 2 kPa gerjesztő nyomással játszotta, míg a legmagasabb hangoknál egészen a 7 kPa nyomásig is elment.

Kísérletei során Fletcher azt is feltárta, hogy a gerjesztő nyomás periodikus, melynek frekvenciája a trombita alaphangjának frekvenciájához áll közel.

### 2.4 A trombita felépítése és realizációja

Egy 134 cm hosszú B trombita három részből áll: egy fűvókából és a hozzá csatlakozó kónikus részből, mely a teljes cső hosszának 21%-át adja, egy egyenes, hengeres csőből, mely további 29%-ot tesz ki, és egy szélesedő, tölcséres szakaszból (kürt vagy korpusz), ami a cső maradék 50%-át teszi ki [4]. A trombita csöve fel van tekerve, azonban ennek nincs kiemelt jelentősége a hangkeltés szempontjából. Ugyan némiképp növeli a bemeneti impedanciát és csökkenti a nyomáshullámok terjedési sebességét [5], de ezektől eltekinthetünk.



1. ábra: A trombita felépítése [6]

A fúvóka a kehelyből és a szárból áll. A kelyhet belső átmérőjének (1,65 cm) ismeretében egy félgömbbel közelítettem, a szár egy kónikusan táguló csőből áll, mely felírható a hosszával és a két végén levő átmérővel (0,374 cm és 1,16 cm) [7].



2. ábra: Fúvókakehely és a fúvóka felépítése [7]

A fúvóka és a kürt közötti középrész egy 31,75 cm hosszú kónikusan 8,763 mm és 11,6 mm között táguló csőből, és egy 39,9 cm hosszú, 11,6 mm átmérőjű egyenes hengeres csőből áll [5]. Itt található három szelep, melyek extra csőhosszt toldanak be, így változtatva meg a hang magasságát. Ezek a szelepek rendre 8,4 cm, 17,3 cm és 25,7 cm hosszú csődarabokat iktatnak be, melyek kis szekunddal, nagy szekunddal és kis terccel mélyítik a trombita alaphangját [4].

A szélesedő toroknyílást a kürt elején és végén ismert átmérőből (1,16 cm és 12 cm) és a tágulás ismeretében meg lehet határozni. Jean-Pierre Dalmont [5] egy módosított Bessel-függvényt használt a trombita tágulásának leírásához, melyet én is beépítettem a modellbe. Ez a függvény:

$$r = \frac{K}{(x+b)^m} - A\sin\left(\frac{x}{h}\pi\right)\sin\left(\frac{x}{h}\frac{\pi}{2}\right) - B\sin\left(\frac{h-x}{h}\pi\right)\sin\left(\frac{h-x}{x}\frac{\pi}{2}\right), \quad (2.25)$$

ahol *r* a sugara a *h* hosszúságú csőnek, *m* a tágulási együttható, *A*, *B*, *K* és *b* konstansok, és az alábbi módon számolhatók:

$$m = \frac{\ln\left(\frac{r_l}{r_s}\right)}{\ln\left(\frac{L}{b}+1\right)},\tag{2.26}$$

$$K = r_l b^m, (2.27)$$

$$A = \frac{h}{\pi} \frac{mK}{(L+b)^{m+1}},$$
 (2.28)

$$B = \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \frac{m(m+1)K}{(h+b)^{m+2}},$$
(2.29)

ahol  $r_l$  és  $r_s$  a Bessel-kürt széles és szűk végének sugara, *m* jellemzően 0,5 és 0,65 közötti értékre adódik [5]. A kürt felírásával a trombita teljes testére vonatkozó tágulási görbe felrajzolható.

A trombitamodell "behangolása" céljából az általam alkalmazott méretek némiképpen eltérnek a fent leírtaktól. Teljes hossza 136,7 cm. A fűvókakehely 1,6 cm átmérőjű félgömb, melyhez egy 81 mm hosszú, 3,74 mm-től 8,55 mm átmérőig táguló kónikus csonka kúp csatlakozik. A trombita középrésze egy 31,8 cm hosszú, 8,763 mm és 11,6 mm átmérő között táguló kónikus elemből és egy 35 cm hosszú, 11,6 mm átmérőjű egyenes csőből áll. A kürt 61 cm hosszú, Dalmont által leírt Bessel-függvény szerint tágul, melynek bemeneti és kimeneti átmérője 11,6 mm és 122 mm, a tágulási együttható 0,5. Trombitám szelepei rendre 16,7 cm, 8,1 cm és 24,8 cm hosszú csődarabokat toldanak be.



3. ábra: A trombitacső általam használt tágulási görbéje

# 3 A waveguide modell

### 3.1 A waveguide módszer elmélete

A waveguide (hullámvezető) módszer akusztikus hangszerek számítógépes modellezésére alkalmas eljárás. Elsősorban egydimenziós rezonátorok (húrok, rudak és csövek) szimulációjára alkalmas, így segítségével akár a hangszintézis is megvalósítható.

Waveguide modellezés során a hangszertestben haladó hullámokra felírható egydimenziós hullámegyenlet megoldását (2.4) használjuk fel [8]. A pozitív és negatív irányban terjedő hullámokat két késleltetősor reprezentálja. Ez N darab, azonos (L) hosszúságú elemi hullámvezetőből áll.



4. ábra: Elemi waveguide

A késleltető párokhoz az adott csőszeletekben levő hangnyomásértéket rendeljük hozzá. A csőben véges sebességgel terjedő nyomáshullámot a késleltetők állapotának léptetésével modellezzük. Így alkotjuk meg a hangszer (például a trombita) egyszerűsített, egydimenziós, időben és térben diszkrét modelljét.

Ha a nyomáshullám a csőben *c* sebességgel terjed, akkor T = L/c időközönként cserélnek értéket a késleltetők.

## 3.2 A waveguide modell megvalósítása

### 3.2.1 A legegyszerűbb modell

A késleltetők kapcsain összegezve a hangnyomás értékeket megkapjuk a fizikai modellben szereplő pozitív és negatív irányban terjedő nyomáshullám szuperpozícióját bármely tetszőleges pontban.



5. ábra: Waveguide késleltetősor

A késleltetősort MATLAB segítségével két vektorban ábrázoltam. A késleltetők állapotát egy-egy vektorban tároltam, páronkénti összegük a hangnyomást adja a cső adott pontjában. A léptetést ciklusba szerveztem, ahol a vektorelemek régi értékeit új értékükkel cseréltem ki. (A MATLAB kódok a függelékben találhatók meg.)

### 3.2.2 Reflexiók beiktatása

Mivel a különböző átmérőjű elemi csőszeletek között az akusztikai hullámimpedancia nem illesztett, a modellben minden elemi csőszakasz végén reflexió lép fel. Ezt a waveguide modellbe a következőképpen vezetjük be: ha az *n*-edik pozitív irányú csőszakasz végén r(n) a reflexió, akkor a térfogatsebesség r(n)-szerese hozzáadódik a negatív irányú hullámhoz, 1-r(n)-szerese pedig továbbjut az n+1-edik csőszakaszba. Hasonlóan a negatív irányú terjedés is ilyen reflexiókat szenved el, és ha az *m*-edik csőszelet bemeneti impedanciája q(m), akkor a pozitív irányú terjedéshez a térfogatsebesség q(m)-szerese adódik hozzá, és az 1-q(m)-szerese jut el az m-1-edik csőszeletet reprezentáló késleltetőhöz [8].



6. ábra: A reflexiós tényezőkkel kiegészített modell

Ezzel a kiegészítéssel már tetszőleges tágulási görbéjű trombitacsövet is átültethetünk waveguide modellbe.

Ezeket a reflexiós tényezőket a szomszédos csőszakaszok hullámimpedanciáiból, különbségük és összegük arányaként számoltam MATLAB-ban. A késleltető vektorpár elemeinek állapotát ezekkel az értékekkel súlyoztam.

### 3.2.3 Lezáró impedancia

Az utolsó csőszeletet a végtelen tér akusztikus impedanciája, a sugárzási impedancia zárja le. Mivel ez sem illesztett impedancia, a cső végén reflexiót szenved el a hullám, azonban a többi, a modellben szereplő reflexióval szemben ez frekvenciafüggő érték.



7. ábra: A késleltetősor lezárása

Kétféle megfontolás alapján lehet a modellbe iktatni a sugárzási impedanciát. Míg Jean-Pierre Dalmont [5] szimulációiban a pereméig falba ágyazott trombita a végtelen féltérbe sugározza le a hangot, addig Levine és Schwinger [9] egy egyenes, infinitezimálisan vékony falú cső sugárzási impedanciáját analitikusan számolta ki a végtelen térre a frekvencia függvényében. Munkám során Levine és Schwinger eredményeit használtam fel a sugárzási impedancia modellezéséhez.



8. ábra: Sugárzási impedancia Dalmont, illetve Levine és Schwinger megfontolásai alapján

Mivel a waveguide modell késleltetői az időtartományban hordozzák a jelet, a cső végi frekvenciafüggő tagot inverz FFT-vel (Inverse Fast Fourier Transform) időtartományba kell transzformálni, és az impulzusválaszból IIR (Infinite Impulse Response) szűrőt kell létrehozni, amin átvezetve a trombita jelét megkapjuk a kisugárzott hangot, illetve számolhatjuk a cső végén reflektált hullámot. Ehhez használtam fel a Levine és Schwinger által számolt függvény numerikus értékeit.

Az IIR szűrő késleltetőkből és erősítőkből realizálható, ahol az erősítési értékek a szűrő impulzusválaszának  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ , ..., a visszacsatolásnak  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , ... diszkrét értékei.



9. ábra: IIR szűrő felépítése

Azért, hogy ne legyen nagy a rendszer késleltetése, az impulzusválaszt egy időtartománybeli ablakozó függvénnyel rövidítjük le. Ha a szűrő bemenete  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ , akkor a kimenete az *n*-edik időpillanatban:

$$y[n] = \sum_{i=0}^{n} b_i u[n-i] + \sum_{i=1}^{n} a_i y[n-i].$$
(3.1)

MATLAB környezetben az invfreqz függvény valósítja meg a szűrőillesztést, ahol másodfokú szűrővel közelítettem a lezáró impedanciát.

### 3.3 A modell hibája

A trombita waveguide modelljének finomításakor meg kell fontolni, mekkorák legyenek az elemi csőszakaszok, vagyis mi lehet *N* optimális megválasztása. Ha túl nagyok a csőszeletek, a modell csak durván közelíti a valóságot, ha viszont nagyon kicsik, a szimuláció túlságosan erőforrás-igényes lesz.

Ezért próbaszámítást végeztem, melyben összehasonlítottam egy 1 méter hosszú, exponenciálisan táguló és reflexiómentes lezárású trombitacső esetén, hogy adott, 1 kHz frekvenciájú, egységnyi szinuszos gerjesztésre mennyiben tér el a waveguide modell által számolt hangnyomás az analitikusan számolttól.



10. ábra: A numerikusan számolt hullám nem illeszkedik tökéletesen az analitikusan számolt burkolóra

Ezt elvégeztem különböző mértékű tágulás (m) és elemi csőhossz (L) esetén is. Egy táblázatban foglaltam össze, végül ábrázoltam a különbségüket az analitikusan számolt értékek arányában, így adva meg az eltérést százalékosan.



11. ábra: A trombita hibája az elemi csőszakasz függvényében

Az eredményekből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy nem érdemes 1 milliméternél kisebb elemi csőhosszt megválasztani, mert alatta már csak alig csökkenthető a hiba. Ennél nagyobb elemi csőhosszra viszont a hiba akár 10% fölé is emelkedhetne, amit szintén nem engedhetünk meg magunknak. Másfelől látható, hogy kevésbé táguló cső esetén a hiba a várakozásokkal szemben nem minden esetben, csupán döntő többségben kisebb; az ábráról leolvasható például, hogy az m = 2 tágulási értékhez nagyobb hiba társul, mint az m = 3 esetében.

# 4 A modell vizsgálata

### 4.1 Bemeneti impedancia számítása

A már felépített waveguide modell frekvenciafüggő bemeneti impedanciáját a (2.22) és (2.23) képletek alapján számoltam *L* hosszúságú egyenes és kónikus csőszeletek esetén MATLAB környezetben.

John Backushoz [10] hasonlóan négy esetet ábrázoltam: az A esetben a trombita csövére, a B esetben a trombitacsőre és a kürtre, a C esetben a fúvókára és a trombitacsőre, és a D esetben a fúvókára, a trombitacsőre és a kürtre kiszámolt bemeneti impedanciát. Mind a négy alkalommal csak elhanyagolható különbséget mutatott az egyenes és kónikus közelítés (az ábrákon ez vizuálisan alig jelenik meg).



12. ábra: Bemeneti impedancia az A és B esetben

Az impedanciacsúcsok a harmonikus felhangsort követik. A B esetből jól látható a kürt hatása: hossza révén csökkenti az alapharmonikus frekvenciáját, így a módusok sűrűsége megnő. Ezzel párhuzamosan aluláteresztő szűrőként viselkedik: a nagyobb frekvenciákon csillapítja a hangot, melegebb, lágyabb hangzást adva neki.



13. ábra: Bemeneti impedancia a C és D esetben

A C eset tanulsága, hogy a fűvóka emeli ki a felharmonikusokat az 500-1000 Hz tartományon. Ezt Backus [10] és Caussé [11] mérései is alátámasztják. A D esetben, vagyis a teljes trombitánál a fűvóka és a kürt hatása együttesen szerepel, ezzel alakítva ki a trombitára jellemző hangzást. A második módus frekvenciája 234 Hz, mely egy zenei "B" hangnak felel meg.

### 4.2 Inharmonicitás számítása

A trombita hangját tekintve pszichoakusztikailag lényeges szempont a felhangok relatív tisztasága. A következőkben arra vagyunk kíváncsiak, hogy a bemeneti impedanciában szereplő harmonikus felhangsor mekkora hibával bír. Backus [10] mérési eredményei jó alapot jelentenek az összehasonlításhoz.



14. ábra: John Backus mérései alapján számolt inharmonicitás görbéi az A, B, C és D esetben [10]

Az inharmonicitás számításához egy rövid MATLAB függvényt írtam, mely azt vizsgálja, hogy a második módusból számolt alaphanghoz képest mekkora a többi módus zenei eltérése centekben.



15. ábra: A waveguide trombitamodell inharmonicitása az A, B, C és D esetben

Az ábrán jól látható, hogy az inharmonicitás csökkentésében leginkább a kürtnek van szerepe, de némileg a fúvóka is javít rajta. Hasonló eredményre jutott John Backus [10] is, azzal az eltéréssel, hogy nála a fúvókával, illetve a kürttel kiegészített csőnek magasabb volt az inharmonicitása, mint az én modellemben, azonban nála a teljes trombitára az inharmonicitás szinte teljesen megszűnt. Nálam a trombita felharmonikusok 10-20 centtel magasabbak voltak az ideálisnál, az 5. módusnál pedig "csak" 25 cent alatt tudott maradni az inharmonicitás a zenei tartományban. Ez nyolcad hang tisztaságot jelent, melyet az átlagos emberi fül már nem tud megkülönböztetni, így zeneileg kielégítő az eredmény.

### 4.3 A trombitaszelepek hatása

A következőkben azt vizsgáltam, hogy a három trombitaszelep lenyomásának különböző variációira hogyan változott meg az alaphang magassága. (A hangközök azonosításához a zenei jelzésrendszert használom.)

szelep	nincs	1	2	3	1+2	1+3	2+3	1+2+3
alapfrekvencia [Hz]	234	206	220	195	195	174	184	166
hangköz	nincs	N2	K2	К3	К3	T4	N3	B4
eltérés [cent]	nincs	-21	-7	-16	-16	-13	-16	6

#### 1. táblázat: A trombitaszelepek hatása

A szelepekkel játszott hangközökkel és átfújással minden zenei hang játszható. Mivel a trombita módusai átfújáskor "felfelé" hamisak, a szelepek pedig "lefelé", a trombitajáték során ezek az eltérések kompenzálják egymást.

Munkám során az is kiderült, hogy a szelepek hosszának pontossága fontos kritérium a hangközök tisztasága szempontjából. 3-9 mm eltérés akár 1-2 Hz frekvencia eltérést és 5-20 cent eltolódást is jelenthet (az alapharmonikus környékén).

### 4.4 Időtartománybeli működés

Az időtartománybeli működés vizsgálata során összevetjük a waveguide modell által leírt hullámterjedést a valós jelenségekkel, hogy ellenőrizzük a modell helytállóságát. Ehhez egy MATLAB-ban összeállított szimulációt végeztem el: egységnyi, 707 Hz frekvenciájú (a bemeneti impedancia egyik rezonanciacsúcsával egybeeső) szinuszos gerjesztés segítségével ábrázoltam a hangnyomás időbeli megváltozását a trombitacső mentén.



16. ábra: Nyomáshullám indul meg a csőben

A trombita testében megindult a nyomáshullám a cső vége felé, közben amplitúdóváltozáson megy át: a fúvókakehelyben hirtelen megnő, a Bessel-kürtben pedig lecsökken. Ez az akusztikai Ohm-törvény következménye.



17. ábra: A cső végén reflexió lép fel

A cső végét elérve látható, hogy ellentétes irányban indul meg a reflektált hullám. Mivel a hang egy része lesugárzódik a térbe, ennek a visszavert hullámnak kisebb az amplitúdója, mint a beérkező hullámnak.



18. ábra: Kialakulnak az állóhullámok

Ahogy a reflektált hullám a fúvókához közeledik, körvonalazódik a minden pontban saját amplitúdóval rezgő állóhullám. Kialakulnak a maximumhelyek, illetve a mozdulatlan csomópontok, ahol az amplitúdó konstans zérus.

A waveguide modell által számolt eredmények visszaadják a valós fizikai hullámterjedés minőségi és mennyiségi jellemzőit, így megállapíthatjuk, hogy a modell helytálló. Tehát a trombitamodellt tetszőleges hullámformájú jellel gerjesztve is jól szimulálhatjuk a hangszertestben kialakuló rezgésállapotokat.

# 5 A gerjesztés modellezése

Rézfúvós hangszerek esetén a tüdőből érkező levegő a fúvókához illeszkedő ajkakat hozza mozgásba, amelyek a fúvókanyíláson átáramló levegőt hozzák rezgésbe. Ily módon az ajkak oszcillátorként viselkednek, a hangszertestben rezgő levegőoszlop a rezonátor szerepét tölti be. Ha az ajkak a hangszer egyik módusfrekvenciáján rezegnek, a hangszer zenei hangot sugároz le.

Adachi [12] kétféle modellt vizsgált az ajkak rezgésének leírásához. Az elsőben az ajkak a levegő áramlási irányára merőlegesen rezegnek ("transverse" model).



19. ábra: "Transverse" model [12]

A másodikban az ajkak  $\theta(t)$  szög szerint fordulnak a fúvókakehelybe rezgés során ("swinging-door" model).



20. ábra: "Swinging-door" model [12]

A gerjesztő nyomás mindkét esetben szinuszos jelleget mutat: az ajkak ciklusonként egyszer záródnak, és a hullámforma hasonlít a szinuszéhoz. Azonban a hullámforma kitöltési tényezője a megszokottól eltér, melynek oka az, hogy az ajkak rövidebb idő alatt záródnak, mint nyílnak.

Adachi kutatásaiból az is kiderül, hogy a kétféle megközelítés a trombitajáték során egyszerre jelentkezik: a "transverse" modell alacsonyabb, a "swinging-door" modell magasabb frekvenciákon válik jelentőssé. Sőt, nemcsak a frekvenciától függ a gerjesztőjel, hanem a játszott dinamikától is, a gerjesztőnyomás növekedésével a felharmonikusok száma is emelkedik.



21. ábra: Gerjesztőnyomás [12]

Megállapítható tehát, hogy szinuszos gerjesztésmodellem a frekvencia csökkenésével és a nagyobb dinamikák játszásakor egyre kevésbé állja meg a helyét, így az ezen a területen rejlő kutatási lehetőségek jó ajánlást nyújtanak a téma folytatására.

# 6 Összefoglalás

Dolgozatomban a trombita fizikai működési hátterének és felépítésének ismertetése és a waveguide modellezés bemutatása után saját trombitamodellem kialakítását, majd a kész modellen végzett vizsgálatok eredményeit ismertettem.

Az időtartománybeli analízis során létrejött a cső végi reflexió, és mintaszerűen kialakultak az állóhullámok. A bemeneti impedanciájával kapcsolatos eredmények a szakirodalommal egybevágtak.

A frekvenciatartománybeli vizsgálat során az alábbi következtetésekre jutottam:

- a) a felharmonikusok kiemelésében a fúvóka játszik közre,
- b) az inharmonicitás csökkentésében a kürt vállal oroszlánrészt,
- c) az alaphang beállításában a cső hosszának és a szelepeknek van szerepe.

Összességében elmondható, hogy a munkám során létrehozott waveguide trombitamodell megfelelően működik. A pontos alaphang, az alacsony inharmonicitás és a szelepekkel játszható hangközök relatív tisztasága alkalmassá teszik ezt a trombitamodellt hangszerként történő felhasználásra, így megfelelő továbbfejlesztéssel akár zenei igények is kielégíthetők vele.

# 7 Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni konzulensemnek, Rucz Péternek a dolgozat lektorálásában nyújtott odaadó segítségét, és a konzultációkba fektetett időt, munkát és energiát.

Szeretném megköszönni Dr. Fiala Péternek, hogy tapasztalattal, bölcsességgel, mégis fiatalos lendülettel oktatott tantárgyában szerettette meg velem a hangszerek fizikáját, és ébren tartotta a téma iránti érdeklődésemet. Munkám során élvezettel forgattam színvonalas, hallgatóbarát jegyzetét.

Szeretném megköszönni édesapám és bátyám nyelvi és formai tanácsait, mellyel a szakdolgozat színvonalát emelték.

Végül szeretném megköszönni barátaimnak, hogy lelkesen támogattak, és ösztönöztek abban, hogy szakdolgozatom a kívánt időben és formában elkészülhessen.

# Irodalomjegyzék

- [1] Dr. Fiala Péter: A hangszerek fizikája, egyetemi jegyzet, 8-9. fejezet
- [2] Neville H. Fletcher, Thomas D. Rossing: *The Physics of Musical Instruments* (1998) 8. fejezet
- [3] N. H. Fletcher, A. Tarnopolsky: *Blowing pressure, power, and spectrum in trumpet playing*, Acoustical Society of America, 105 (2) (1999) 874-881
- [4] Wikipédia, Trombita szócikk, mely tartalmazza annak felépítését is: http://hu.wikipedia.org/wiki/Trombita
- [5] Jean-Pierre Dalmont: *Trumpet with near-perfect harmonicity: Design and acoustic results*, Acoustical Society of America, 129 (1) (2011) 404-414
- [6] Karsai Márton: A trombitahang fizikai jellemzése, SZTE, Szakdolgozat (2010)
- [7] PWMusic hangszerüzlet, Fúvóka anatómia, 2012: http://www.pwmusic.net/index.php/cPath/240?language=hu
- [8] Vesa Välimäki: Discrete-Time Modeling of Acoustic Tubes Using Fractional Delay Filters, Helsinki University of Technology (1995)
- [9] H. Levine, J. Schwinger: On the Radiation of Sound from an Unflanged Circular Pipe, Physical Review, 73 (4) (1948) 383-406
- [10] John Backus: Input impedance curves for the brass instruments, Acoustical Society of America, 60 (2) (1976) 470-480
- [11] René Caussé: Input impedance of brass musical instruments Comparison between experiment and numerical models, Acoustical Society of America, 75 (1) (1984) 241-254
- [12] Seji Adachi, Masa-aki Sato: *Time-domain simulation of sound production in the brass instrument*, Acoustical Society of America 97 (6) (1995) 3850-3861

# Függelék

### F1. A központi kód

```
% TROMBITA WAVEGUIDE MODELL MATLAB KOD
%*_*_*_*_*_*_*_*_*_*_*_*_*_*_*_*_*_*_*
clear
load lev_values % Levine es Schwinger eredmenyeinek betoltese
% GEOMETRIA MEGADÁSÁSA
% A csoelemek hossza
h(1) = 8; % a fuvoka kehely hossza
             % a fuvoka cso hossza
h(2) = 81;
h(3) = 318; % leaderpipe hossza
h(4) = 350; % egyenes cso hossza
h(5) = 610; % exponenecialis kurt hossza
% Szelepek allapota
valves(1) = 0;
valves(2) = 0;
valves(3) = 0;
% Szelepek hossza
valve length(1) = 167;
valve length(2) = 81;
valve_length(3) = 248;
for i=1:1:3
    if valves(i)==1
        h(4) = h(4) + valve_length(i);
    end
end
x = 1; % aktualis hely
xmax = sum(h(1:end)); % a cso hossza
t = 1; % aktualis ido
tmax = 2*xmax; % a vizsgalat ideje
Zt = 0; % sugarzasi impedancia
Ref = 0; % cso vegi reflexio
a = zeros(xmax,1); % felso kesleltetosor regi ertekei
b = zeros(xmax, 1); % also kesleltetosor regi ertekei
auj = zeros(xmax,1); % felso keslelteto sor uj ertekei
buj = zeros(xmax,1); % also keslelteto sor uj ertekei
P = 0.*eye(1,xmax); % kimenet matrix (hangnyomas)
% konstansok es valtozok felvetele a hullammpedanciak szamolasahoz
L = 0.001;
               % az elemi csodarabok hossza
d0 = 0.0116;
               % a kezdeti atmero
dmax = 0.122; % a végátmérő
%% A CSO TAGULASA
```

```
xvec = 0:xmax-1;
d = diameter_calculator(xmax, xvec, h, d0, dmax, L);
ds = d(1:end-1);
de = d(2:end);
dm = (ds+de)/2; % atmero az elemi cso kozepen
Sm = (dm.^2*pi)/4; % keresztmetszet az elemi cso kozepen
%% MODELLPARAMÉTEREK
ro = 1.225; % a levego surusege a terben
c = 340;
             % a hullamfront terjedesi sebessege
f = 707;
             % gerjeszto frekv
w = 2*pi*f; % a gerjesztő szinuszjel körfrekvenciája
k = w/c; % a hullámszám
Zs0 = ro*c; % specifikus hullamimpedancia
Za0 = Zs0./Sm; % akusztikus hullamimpedancia
fb = 3000; % hatarfrekvencia
           % lepeskoz
df = 1;
fvec = df:df:fb;
S = 0.25*d.^2*pi; % keresztmetszet
Z0 = (ro*c)./S; % akusztikus hullamimpedancia (idotartomanyi analizishez)
w = 2*pi*fvec; % a gerjeszto szinuszjel korfrekvenciaja
                % a hullamszam
k = w/c;
dt = L/c; % valos idoegyseg
r = zeros(xmax,1); % pozitiv iranyu reflexios tenyezok
q = zeros(xmax,1); % negativ iranyu reflexios tenyezok
% reflexios tenyezok szamolasa
q(2:end) = (Z0(1:end-1) - Z0(2:end))./(Z0(1:end-1) + Z0(2:end));
r(2:end) = (Z0(2:end) - Z0(1:end-1))./(Z0(2:end) + Z0(1:end-1));
% Levine-Schwinger ertek es reflexio szamolasa
kr = k*d(end)/2;
                             % a fuggveny x erteke
Z(1) = 0;
ZLs = interp1(kav,Z,kr); % sugarzasi impedancia es a hullamimpedancia
aranya
ZL = ZLs*Za0(end);
                             % sugarzasi impedancia erteke
Zt = ZLs*Z0(end); % sugarzási impedancia erteke
Ref = (Zt-Z0(end))/(Zt+Z0(end)); % a cső végi reflexió
%% Dalmont-fele sugarzasi (flanged) impedancia szamolasa
tr = 0.82*0.5*dmax./(1+((0.77*k*0.5*dmax).^2./(1+0.77*k*0.5*dmax)));
% hosszkorekcio
Rr fl = (1+0.323*k*0.5*dmax-
0.077.*(k*0.5*dmax).^2)./(1+0.323*k*0.5*dmax+(1-0.077).*(k*0.5*dmax).^2);
Rr = - abs(Rr_fl).*exp(-2i*k.*tr);
Zt_fl = Z0(end)*(1+Rr)./(1-Rr);
%% Bemeneti impedancia szamolasa egyenes csoszakaszokra
Z cyl = ZL;
for iElem = xmax-1:-1:1
```

```
Z_cyl = Za0(iElem)*(Z_cyl + 1i*Za0(iElem)*tan(k*L))./(Za0(iElem) +
1i*Z_cyl.*tan(k*L));
end
%% Bemeneti impedancia szamolasa linearis csoszakaszokra
Z_con = conical_imped(L*ones(xmax-1,1), [ds(:),de(:)]/2, k, Zs0, ZLs*Zs0);
Z_con = Z_con / S(1);
%% Inharmonicitas szamolasa
dev = inharmonicity(Z cyl, df);
%% Cső végi IIR szűrő
[kav_new, R_new] = new_lev_values(kav, R, Z); % uj Levine-Schwinger erekek
[filt_b, filt_a] = test_invfreqz(kav_new, R_new); % szuroparameterek
meghatarozasa
filt_state = zeros(max(length(filt_a),length(filt_b))-1,1); % szuroallapot
%% A jel vegigfut a kesleltetokon
fig = figure;
formatfig([10 10],[0.1 0.1 0.1 0.1]);
set(gca, 'FontSize', 18);
for t = 1:1:tmax
% reflexiok hozzaszamolasa
auj(1:end) = (1+r(1:end)).*a(1:end) + q(1:end).*b(1:end);
buj(1:end) = (1+q(1:end)).*b(1:end) + r(1:end).*a(1:end);
% kesleltetok leptetese
b(1:end-1) = buj(2:end);
[b(end), filt_state] = filter(filt_b, filt_a, auj(end), filt_state);
a(2:end) = auj(1:end-1);
% gerjesztes
a(1) = sin(2*pi*f*(t*dt));
% a kimenet eloall
P(t,:) = real(a + b);
    if rem(t,20)==1
        plot(P(t,:),'r-','LineWidth',1.5);
        xlabel('csőhossz [mm]');
        ylabel('hangnyomás [Pa]');
        ylim([-2 2]);
        xlim([0 xmax]);
        pause;
    end
end
%% Kirajzolas
fig = figure;
formatfig([6 3.5],[0.1 0.1 0.1 0.1]);
```

```
semilogy(fvec,abs(Z_cyl)/Za0(1),'Color','k');
hold on;
semilogy(fvec,abs(Z_con)/Za0(1),'Color','r');
hold off;
%legend({'Conical elements','Linear elements'});
title('D');
set(gca, 'FontSize', 9);
xlim([60, 1000]);
xlabel('f [Hz]');
ylabel('Z_i_n [Ohm]');
print -dpng -r300 Zin valves 0 modified.png
```

#### %%

```
fig = figure;
formatfig([15 2.5],[1.5 1.5 0.5 0.5]);
plot(xvec/1000,d/2, 'k-','LineWidth', 1.2);
set(gca, 'FontSize', 9);
hold on;
plot(xvec/1000, -d/2, 'k-', 'LineWidth',1.2);
hold off;
%title('A trombitacso tagulasi gorbeje');
axis equal tight;
xlabel('x [m]');
ylabel('r [m]');
print -dpng -r300 Trombita_tagulasi_gorbe_elethu_abrazolas.png
```

# F2. Átmérőt számoló kód

```
function d = diameter_calculator(xmax, xvec, h, d0, dmax, L)
d = zeros(xmax,1); % atmero vektor
Lhorn = h(5)/1000; % kurt hossza
m = 0.5; % tagulasi egyutthato
b = Lhorn/((dmax/d0)^(1/m)-1); % b konstans
K = dmax/2*b^m; % K konstans
A = Lhorn*m*K/pi/(Lhorn+b)^(m+1); % A konstans
B = ((Lhorn/pi)^2)*m*(m+1)*K/((Lhorn+b)^(m+2)); % B konstans
% Az atmero szamitasa
d(1:h(1)) = 0.00374+(2*h(1)/1000-0.00374)*(sin(acos(xvec(1:h(1))/h(1))));
d(h(1)+1:sum(h(1:2))) = 0.00374+(0.00855-0.00374)/h(2)*xvec(1:h(2));
d(sum(h(1:2))+1:sum(h(1:3))) = 0.00876+(0.0116-0.00876)/h(3)*xvec(1:h(3));
d(sum(h(1:3))+1:sum(h(1:4))) = 0.0116;
a = 2*K/(Lhorn+b)^m;
for ind=1:1:h(5)
    x = Lhorn-L*ind;
    d(sum(h(1:4))+ind) = 2*K/(x+b)^m -
2*A*sin(x*pi/Lhorn)*sin(x*pi/(2*Lhorn)) - 2*B*sin((Lhorn-
x)*pi/Lhorn)*sin((Lhorn-x)*pi/(2*Lhorn));
```

```
end
plot(abs(d));
```

## F3. Inharmonicitást számoló kód

```
%% INHARMONICITAS SZAMOLO
function dev = inharmonicity(Z_cyl, df)
%% Modusok megkeresese
num = 1;
for ind = 3:1:length(Z_cyl)
    if Z_cyl(ind-2)<Z_cyl(ind-1) && Z_cyl(ind-1)>Z_cyl(ind)
        mode(num) = ind;
        num = num + 1;
    else
    end
end
mode = (mode-1)*df;
%% Inharmonicitas szamitasa
harm(1) = mode(2)/2; % alapharmonikus frekvenciaja
for ind = 1:1:length(mode)
        harm(ind) = harm(1)*ind;
end
dev = 1200*log2((harm(2:end)./mode(2:end))); % elteres centekben
vec = 2:1:length(harm);
%% Inharmonicitas abrazolasa
fig = figure;
formatfig([12 9],[1.5 1.5 0.5 0.5]);
plot(vec, abs(dev), 'b:.');
legend('Inharmonicitás', 'location', 'SouthEast');
set(gca, 'FontSize', 9);
xlim([2, 7]);
xlabel('Mode');
ylabel('Deviation [cent]');
print -dpng -r300 Inharmonicitas.png
```

### F4. Levine és Schwinger eredményeit átskálázó kód

% A Levine-Schwinger ertekek atskalazasa

```
function [kav_new, R_new] = new_lev_values(kav, R, Z)
kav_new = zeros(1,600); % uj Levine-Schwinger ertekek
kav_new(1:512) = kav(1:512);
dkav = kav(512)-kav(511); % delta kav
for k=1:1:(600-512)
    kav_new(512+k) = kav(512) + k*dkav;
end
R_new = zeros(1,600); % uj impedancia ertekek
R_new(1:512) = (Z-1)./(Z+1);
dR = R(512)/(600-512); % delta R
for k=1:1:(600-512)
    R_new(512+k) = R(512)-k*dR;
end
```

# F5. Lezáró impedancia szűrőt létrehozó kód

```
function [b, a] = test_invfreqz(kav_new, R_new)
a = 0.05; % Radius [m]
c = 343; % Speed of sound [m/s]
fs = 48000; % Sampling freq [Hz]
k = kav_new / a; % Wave number [1/m]
f = k*c/(2*pi); % Frequency [Hz]
% Create frequency vector
N = 8192;
fi = linspace(0, fs, N+1);
fi = fi(1:N);
% Interpolate and calculate conjugate
R(1) = 1;
Ri = interp1(f, R_new, fi);
Nh = floor(N/2);
Ri(end-Nh+2:end) = conj(fliplr(Ri(2:Nh)));
% Check NaNs
Ri(isnan(Ri)) = 0;
% Call invfreqz
nfi = fi(fi <= fs/2) / fs * 2*pi; % Normalize frequency</pre>
nRi = Ri(fi <= fs/2); % Take part that is under fs/2</pre>
% Filter orders
na = 2;
nb = 2;
```

```
% Weighting
wt = zeros(size(nfi));
% Select frequencies under 5 kHz
wt(nfi < (5000 / fs * 2*pi)) = 1;
% Perform filter fitting
[b, a] = invfreqz(nRi, nfi, na, nb, wt);
%% Comparison
theta = linspace(0, 2*pi, N+1); theta = theta(1:end-1);</pre>
```

```
Hfilt = polyval(b, exp(1i*theta))./polyval(a, exp(1i*theta));
```

```
%*-*-*-*-*-*-*-kod_vege-*-*-*-*-*-*-*
```