Exercitatio artem parat (Tacitus)

Random Club 2010 tavasz

Advanced probabilistic calculus for engineers

Minden jelenséget okok rendszere hoz létre, amelyek mindegyikét legtöbbször nem tudjuk figyelembe venni, így a jelenség lefolyása véletlenszerű lesz a szemünkben. Ha a figyelembe nem vett körülmények nagy számúak, és egyenként kis hatásúak, akkor véletlenszerűnek nevezzük a jelenséget. Komplex jelenségeknél kénytelenek vagyunk követni ezt a szemléletmódot. Hogy mindemellet karakterizálni tudjuk a jelenséget, ebben segítenek a sztochasztika módszerei. Ebben az értelemben rendkívül általános és megkerülhetelen eszköztárat kínál fel számunkra.

Az RC klub első 25 találkozójának feladatanyagát tartalmazza ez az összeállítás. A találkozókon egy-egy témakört dolgoztunk fel, problémák megoldásán keresztül. A problémák/feladatok kitűzése után néhány percnyi egyéni fejtörés következett, majd egy lényeges megoldási trükk megismerése mellett lehetett folytatni a töprengést, s ha esetleg még ezután sem volt egyéni megoldási javaslat, közösen oldottuk meg a feladatot.
A klub céljai meghirdetésének megfelelően az informatikus mérnökség számára egyik legfontosabb diszciplina, a sztochasztika területéről számítási technikák megismerése, gyakorlása problémamegoldás formájában. Hetente egy órára jöttünk össze a BME Hiradástechnikai Tanszék IE 4. emeleti körtárgyalójában szerdánként.
Több vonatkozásban is sikeresnek tekinthető a Klub. Néhány hónap alatt, tisztán feladatmegoldások kapcsán pl. a Black-Scholes egyenletig eljutottunk. Célunknak megfelelően elsősorban a technikákra, kalkulusra összpontosítottunk, de mindenütt, ahol ez szorosan kapcsolható volt, alkalmazás modelleket vizsgáltunk mérnökséghez közel álló területekről (pl. sorbanállás, kiszolgálás, buffer méretezés, raktározás-tárolás, tőzsdei folyamatok). Ősszel folytatódik a klub.
Kellemes fejtörést a feladatokhoz!

Üdvözlettel

Tartalom

Klasszikus módszerek

1. Egy üzemben gyártott selyemharisnyák közül átlagban minden ezredik hibás. A harisnyákat kétszázasával csomagolják dobozokba. Számítsuk ki, hogy ezer doboz közül átlagban hány olyan lesz, amely csupa hibátlan harisnyát tartalmaz.

2. Legalább hány ember esetén nagyobb ½-nél annak a valószínűsége, hogy legalább kettőnek azonos hónapra esik a születésnapja?

3. Tíz kéziratot harminc irattartóban tudunk elhelyezni (egy kézirat 3 irattartóban fér el). Mennyi annak a valószínűsége, hogy 6 véletlenszerűen kiválasztott irattartóban nem lesz egyetlen komplett kézirat sem?

4. Az $S = \{1, 2, ..., N\}$ számhalmazból véletlenszerűen (visszatevéssel) kiválasztunk két részhalmazt, ezek A és B. Számoljuk ki a $A \cap B = 0$ esemény valószínűségét!

5. Az $S = \{1, 2, ..., N\}$ számhalmazból véletlenszerűen (visszatevéssel) kiválasztunk r részhalmazt, ezek $A_1, ..., A_r$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy diszjunkt a halmazok ezen rendszere?

6. Egy mozi egy sorában N szék van, és n néző ül (véletlenszerű helyen). Számoljuk ki a következő események valószínűségét:
a.) sehol sem ül két néző egymás mellett;
b.) minden nézőnek pontosan egy szomszédja van.

7. n golyót helyezünk el N urnába véletlenszerűen. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy nem lesz üres urna.

8. 5 urnánk van. Az első három urnában 2-2 fehér és 3-3 fekete, a negyedik es ötödikben 1-1 fehér és 1-1 fekete golyó van. Találomra kiválasztunk egy urnát és kihúzunk egy golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a negyedik vagy az ötödik urnát választottuk ki, ha a kihúzott golyó fehér volt?

9. Egy oktató p valószínűséggel jön be egy nap a tanszékre. Ha aznap bejön, akkor annak valószínűsége, hogy k ember keresi μ paraméterű, míg ha nem jön be, λ paraméterű Poisson eloszlás szerinti ($\mu > \lambda$). Feltéve, hogy K hívás érkezett, mi a valószínűsége, hogy bejött az oktató?

10. Egy urnában van n piros és 1 fehér golyó. Visszatevéssel húzunk az urnából egy-egy golyót, és minden húzás után még egy piros golyót teszünk az urnába. Jelölje X annak a kísérletnek a sorszámát, amikor először húzunk fehér golyót. Határozzuk meg X várható értékét!

11. Szindbádnak jogában áll N háremhölgy közül kiválasztani egyet olyan módon, hogy az előtte egyenként elvonuló hölgyek valamelyikére rámutat. A hölgyek tetszőleges szépségsorrendben érkezhetnek, s szépségben különbözők. Szindbád azt a stratégiát választja, hogy elenged k hölgyet, amelyek közül megjegyzi a legszebbet, majd a továbbiak közül azt választja, amelyik szebb, mint a megjegyzett.
a.) Mi a valószínűsége, hogy a legszebbet választja?
b.) Mi legyen k értéke, hogy az a.)-beli valószínűség maximális legyen?

12. Egy évre d Ft biztosítási díjat fizetünk. Ha nincs balesetünk az évben akkor ez a díj λ-szeresére mérséklődik (λ <1), ha a következő évben sincs, akkor λ^2-szeresére, s.í.t., ha viszont egy évben baleset történik, akkor ismét d Ft a díj. Ha p valószínűséggel történik baleset, akkor mekkora az n-edik évben várható biztosítási díj?

13. Egy urnában a fehér és b piros golyó van. Ha egy fehér golyót húzunk ki, akkor azt visszatesszük, ha pirosat, akkor helyette egy fehéret teszünk vissza. Ezt a műveletet n-szer ismételjük. Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy mindezek után egy golyót kihúzva az fehér lesz!

14. Egy utas két villamosjárat közül választhat, hogy melyikkel utazik. A villamosok periódikusan járnak, T_1 illetve T_2 időközönként követik egymást. A két járat egymáshoz nincs szinkronizálva, véletlenszerű. Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy a megállóba érkező utasnak nem kell t időnél többet várakoznia ($0<t<\min(T_1, T_2)$).

15. Egy kerek asztal köré 2n vendég ül le véletlen sorrendben, fele férfi, fele nő. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy a vendégeket szét lehet osztani n olyan diszjunkt párra, hogy minden párban egy férfi és egy nő lesz.

16. Legyenek $C_1, C_2, ..., C_n$ pontok függetlenek és egyenletes eloszlásúak egy O középpontú, 1 sugarú K körben. B véletlen halmaz elemei legyenek a kör azon pontjai, amelyek közelebb vannak az O ponthoz, mint a kör határvonalához vagy a $C_1, C_2, ..., C_n$ pontok bármelyikéhez. Számoljuk ki a B halmaz területének várható értékét.

17. Tekintsük a következő teszt jellegű vizsgáztatási szabályt: egy vizsgakérdés egy vizsgalapra van felírva, és minden kérdéshez három válasz van megadva, amelyek közül csak egy helyes. A vizsgázónak ezt a lapot kell kitöltenie a helyesnek vélt választ megjelölve. Tegyük fel, hogy a vizsgázó p valószínűséggel tudja a helyes választ. Ha nem tudja a választ, akkor 1/3 valószínűséggel jelöli meg a 3 lehetséges válasz közül az egyiket. Mennyi a valószínűsége, hogy azért adott a vizsgázó helyes választ egy vizsgakérdésre, mert tudta a helyes eredményt?

18. n fiók közül valamelyikbe betette valaki az útlevelét, de elfelejtette, hogy melyikbe. Közvetlenül utazás van és idegesen keresgél. Annak valószínűsége w, hogy kihúzva azt a fiókot, amelyben az útlevél van, abban megtalálja azt. A fiókok közül a keresgélő ugyanolyan valószínűséggel húzza ki mindegyiket. Ha az először kihúzott fiókban nem találja az útlevelét, mennyi annak a valószínűsége, hogy az valóban nincs ott?

Eloszlás- és sűrűségfüggvény kiszámítása: Alaptechnikák

1. Egységnyi hosszúságú szakaszt véletlenül választott pontjával két részre osztunk. Mi a rövidebb rész eloszlásfüggvénye?

2. Egy ξ valószínűség változó eloszlásfüggvénye F(x). Határozzuk meg $\sqrt{F(\xi)}$ sűrűségfüggvényét!

3. A ξ és η független valószínűségi változók egyenletes eloszlásúak a [0,a] intervallumon. Határozzuk meg $\dfrac{\xi}{\eta}$ sűrűségfüggvényét!

4. A ξ_1, ξ_2, ξ_3 független valószínűségi változók egyenletes eloszlásúak a [0,1] intervallumon. Határozzuk meg $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ összeg sűrűségfüggvényét!

5. A (ξ_1, ξ_2) pont egyenletes eloszlású az $\{(x, y) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le a\}$ négyzetben. Mutassuk meg, hogy $|\xi_1 - \xi_2|$ és $\min(\xi_1, \xi_2)$ valószínűségi változók azonos eloszlásúak!

6. Addig dobunk egy kockával, amíg 5-nél kisebb számot nem kapunk. Jelölje ξ az utolsó dobás eredményét, ν pedig a dobások számát. Függetlenek-e ezen valószínűségi változók?

7. A $\xi_1, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, azonos eloszlásúak F(x) eloszlásfüggvénnyel. Adjuk meg a minimális és maximális érték valószínűségi változó pár eloszlásfüggvényét.

Eloszlás- és sűrűségfüggvény kiszámítása: Rendezett minta esete

1. Legyenek ξ és η független, [0,1] intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Számoljuk ki a $\{\max(\eta,\xi)-\min(\eta,\xi)<b\}$, $0\le b\le 1$ esemény valószínűségét!

2. Legyenek $\xi_1,...,\xi_n$ független, [0,a] intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Számoljuk ki az $\xi_1^*,...,\xi_n^*$ rendezett minta sűrűségfüggvényét.

3. A 2.feladat megoldását felhasználva, mutassuk meg, hogy $\xi_i^*-\xi_{i-1}^*$, i=1,2,…,n+1 (ξ_{n+1}^*=a) rendezett minta szomszéd különbségek azonos eloszlásúak. Ennek alapján számoljuk ki ezen különbségek sűrűségfüggvényét.

4. Számoljuk ki $n(1-F(\xi_n^*))$ aszimptotikus eloszlásfüggvényét, ha $n\to\infty$, ahol F(x) a ξ_i, $0\le i\le n$ valószínűségi változók folytonos eloszlásfüggvénye.

5. Múltban megfigyelt N természeti jelenség maximumot (pl. éves áradás) $\xi_1,...,\xi_N$ független, azonos eloszlású valószínűségi változóval modellezzük. Számoljuk ki annak valószínűségét, a jövőben megfigyelhető n maximum közül x darab nagyobb lesz, mint a már megfigyeltek közül az m-edik legnagyobb (azaz növekvő sorba rendezve a múltbeli maximumokat az N-m-1 sorszámú).

Várható érték: Indikátorfüggvény, várható érték linearitása

1. Urnában M fehér, N-M fekete golyó van, visszatevés nélkül kihúzunk n golyót. Legyen ξ a kihúzott fehér golyók száma, ξ eloszlása hipergeometriai. Számítsuk ki ξ várható értékét.

2. Egy csoportban 25-en tanulnak. Számítsuk ki azon hónapok számának várható értékét, amelyekre nem esik születésnap.

3. Egy kockás füzetlapra ledobunk egy egységsugarú kört (négyzetek oldalhosssza 1). Számítsuk ki a kör által fedett rácspontok számának várható értékét.

4. Legyenek $\xi_1,...,\xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, pozitív értékűek és azonos eloszlásúak. Legyen $\eta_k = \dfrac{\xi_k}{\xi_1 + ... + \xi_n}$. Számítsuk ki η_k várható értékét.

5. N cellába szétosztunk n részecskét véletlenszerűen. Jelölje $\mu_0(n,N)$ az üresen maradó cellák számát. Számoljuk ki $\mu_0(n,N)$ szórásnégyzetét.

6. A síkra egymástól függetlenül ledobunk n darab r sugarú kört úgy, hogy ezek középpontjai egyenletes eloszlásúak egy R sugarú körben. Ha X(m) jelöli a sík azon pontjaiból álló halmaz területét, amelyeket pontosan m kör fed le, határozzuk meg a

$$M(m,N,R) = \frac{EX(m)}{\pi R^2}$$

normált várható értéket, illetve a $\lim\limits_{N,R\to\infty} M(m,N,R)$ határértéket, ha $N\left(\dfrac{r}{R}\right)^2 \to \lambda$.

Várható érték: Feltételes várható érték és általánosítása

1. Legyen ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon.
Legyen η valószínűségi változó a következő

$$\eta = \begin{cases} \xi & ,ha\ \xi \le 0.5 \\ 0.5 & ,ha\ \xi > 0.5 \end{cases}$$

Számítsuk ki $E(\eta \mid \xi)$ feltételes várható értéket!

2. Kockával n-szer dobunk. Jelölje ξ_n a dobott 3-asok, η_n a dobott páratlan számok darabszámát. Számítsuk ki az $E(\xi_n \mid \eta_n)$ feltételes várható értéket!

3. Legyen (X,Y) egyenletes eloszlású a (0,0), (0,1), (1,0) sarokpontú háromszögben.
Számítsuk ki $E(X \mid Y = y)$ feltételes várható értéket!

4. Egy kockadobás eredménye ξ. Ezután ξ-szer feldobva a kockát a legnagyobb dobás eredménye η. Számítsuk ki $E(\eta \mid \xi)$ feltételes várható értéket!

5. A ξ és η független valószínűségi változók egyenletes eloszlásúak a $[0,1]$ intervallumon. Számítsuk ki $E(\xi \mid \xi > \eta)$ feltételes várható értéket!

6. Legyenek $\xi_1,...,\xi_n$ független, azonos eloszlású, véges várható értékű valószínűségi változók, továbbá legyen $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Igazoljuk, hogy $E(\xi_i \mid S_n = x) = x/n$!

7. Tekintsük az (Ω, A, P) valószínűségi mezőt. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathrm{A} \in A$ esetén, ahol $A_1 \subseteq A$, fennáll,

$$\int_{\mathrm{A}} E(\xi \mid A_1)\, dP = E(\xi P(\mathrm{A} \mid A_1))$$

Generátorfüggvény technikák

1. Bernoulli kísérletet végzünk. Jelölje ξ_k a k-adik sikeres kimenetelű kísérlet sorszámát, ahol p egy kisérletben a siker valószínűsége. Számítsuk ki ξ_k várható értékét, szórását és generátorfüggvényét!

2. A ξ valószínűségi változó nemnegatív egész értékeket vesz fel, generátorfüggvénye g(z). Igazoljuk, hogy b>a>0 esetén

$$E\frac{1}{(\xi+a)(\xi+b)}=\int_0^1 z^{b-a-1}\int_0^z y^{a-1}g(y)\,dy\,dz$$

3. Egy telefonközpontba t idő alatt érkező hívások száma λ t paraméterű Poisson eloszlás szerinti. Egy-egy hívás 1-p valószínűséggel elvész, p valószínűséggel sikeres. Határozzuk meg az időegység alatti sikeres beszélgetések generátorfüggvényét!

4. Adjuk meg $\max(\xi_1,...,\xi_\nu)$ eloszlásfüggvényét, ahol $\xi_1,...,\xi_\nu$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók F(z) generátorfüggvénnyel, ν ezektől független, egész értékeket felvevő valószínűségi változó G(z) generátorfüggvénnyel.

5. Legyenek ξ és η független geometriai eloszlású valószínűségi változók p_1 illetve p_2 paraméterrel. Számoljuk ki a $\min(\xi,\eta)$ generátorfüggvényét!

6. Egy egyed k számú egyedet fertőz meg p_k valószínűséggel (k=0,1,…). A populáció fertőzése egy egyedtől indul. Tegyük fel, hogy időegységenként zajlik le egy fertőzési lépés. Határozzuk meg az n-edik időegység végén a fertőzöttek számának generátorfüggvényét!

Konvergencia: A Borel-Cantelli technika

1. Legyenek $\xi_1, \xi_2, ...$ független, azonos eloszlású, normális eloszlású valószínűségi változók. Érvényes-e a nagy számok (gyenge) törvénye az $\eta_n = \cos\left(\frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}\right)$, $n = 1, 2, ...$ sorozatra?

2. Végtelen sok független bináris kísérletben az n-edik sikerének valószínűsége $1/n^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. k egymást követő kísérlet sikerét figyeljük. Borel-Cantelli lemma segítségével számoljuk annak valószínűségét, hogy végtelen sokszor áll elő siker?

3. Legyenek $\xi_1, ..., \xi_n$ valószínűségi változók korrelálatlanok, azonos véges m várható értékkel és σ^2 szórásssal. Mutassuk meg, hogy a

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + ... + \xi_{n^2}}{n^2} = m\right) = 1.$$

4. Legyenek $\xi_1, \xi_2, ...$ független, azonos 0 várható értékű valószínűségi változók alábbi eloszlásúak

$P(\xi_i = -1) = 1 - 1/n^2$, $P(\xi_i = n^2 - 1) = 1/n^2$

Mutassuk meg, hogy $P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} = -1\right) = 1$!

5. Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{x_1 + ... + x_n} dx_1 ... dx_n$$

Konvergencia: Alkalmazások a matematikai statisztikában

1. Mutassuk meg, hogy a tapasztalati eloszlásfüggvény az eloszlásfüggvény torzítatlan és konzisztens becslése.

2. Legyen $x_1,...,x_n$ egy minta, $E(x_k^4)<\infty$, k=1,2,… . Legyen $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$,

$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2$. Határozzuk meg az alábbi határeloszlást:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\overline{x}-Ex_1}{s/\sqrt{n}}<x\right).$$

3. Bernoulli kísérletet végzünk, ahol a siker valószínűsége p. Adjunk $1-2\alpha$ megbízhatóságú konfidencia intervallumot a p paraméterre.

4. Egy urnában ismeretlen N számú sorszámozott golyó van. Visszatevéssel kihúzunk n golyót. Az N szám becslésére az $1/\eta_n$ statisztikát használjuk, ahol

$$\eta_n=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{N}\xi_k(\xi_k-1)$$

és ξ_k jelöli a k sorszámú golyók számát a mintában.

a.) Számítsuk ki η_n várható értékét!

b.) Adjunk aszimptotikus közelítést $D\eta_n$ szórásra, $n,N\to\infty$ esetén, ha $N/n\to\alpha$.

5. Legyen $x_{(1)}\le x_{(2)}\le...\le x_{(n)}$ az $x_1,...,x_n$ minta rendezettje, ahol x_k értékei egyenletes eloszlásúak az [a,b] intervallumon. Az $a^*=x_{(1)}$ és a $b^*=x_{(n)}$ becslések torzítatlan illetve aszimptotikusan torzítatlan becslései-e az a,b paramétereknek?

Valószínűség felső becslések: A Bernstein technika és variációi

1. Legyenek $X_1,...,X_9$ független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók a [0,1] intervallumon. Legyen $Y = \sqrt[9]{X_1 X_2 \cdots X_9}$. Adjunk becslést Markov módszerével a

$$P\left(0.188875 < Y < 0.716531\right)$$

valószínűségre!

2. 10 szabályos kockával dobunk. Adjunk felső becslést Csebisev módszerével annak a valószínűségre, hogy a dobott számok átlag vagy nagyobb, mint 4 vagy kisebb, mint 3.

3. Vezessük le a Csebisev-Cantelli felső becslés formulát:

$$P\left(X - E(X) \geq t\right) \leq \frac{Var(X)}{Var(X) + t^2}$$

4. Laci és Sanyi játszanak. Pénzt dobnak fel, s aki eltalálja 1 forintot nyer. 100 pénzdobásig tart a játék.

a.) Bernstein módszerével adjunk felső becslést annak valószínűségére, hogy Sanyi legalább 3-szor annyit nyer, mint Laci. (Ne használjunk formulát, vezessük le a felső becslést.)

b.) Csebisev-Cantelli módszerével mire jutnánk?

5. Legyenek $X_1,...,X_n$ független, 0,1 értéket felvevő valószínűségi változók, ahol $P\left(X_i = 1\right) = p_i$. Adjunk felső becslést Bernstein módszerével a

$$P\left(X > (1+\delta)\mu\right)$$

valószínűségre, ahol $X = X_1 + ... + X_n$ és $\mu = E\left(X\right)$.

6. Egy 1000 m^3 térfogatú gödröt töltenek fel teherautók építési sittel. Naponta jön egy teherautó, amely maximum 10 m^3 sittet tud szállítani, de véletlenszerű, hogy mennyit hoz. Elenyésző-e annak a valószínűsége negyedév múlva sincs félig a gödör? (Elenyészőnek tekintjük, ha kisebb, mint 0.05.. Használjuk a Hoeffding-becslést.)

Valószínűség felső becslések: Nagy eltérések módszere

1. (A “nagy eltérés”) Pénzfeldobás-sorozatot tekintünk: $\xi_1,...,\xi_n$, $\{0,\ 1\}$ kimenetelekkel.

a.) Mutassuk meg, hogy

$$(M_n =)\ P\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i > nx\right) \sim e^{-nI(x)} \qquad (\sim:\ \tfrac{1}{n}\ln M_n \underset{n}{\rightarrow} -I(x))$$

x>0, ahol I(x) = xlog(x) + (1 − x)log(1 − x) –ln2. (Közvetlenül (kombinatorikusan) adjunk alsó és felső becslést $\frac{1}{n}\ln M_n$ -re, majd a Stirling-formula felhasználásával vizsgáljuk a ezen becslések konvergenciáját.)

b.) Legyen a pénz hamis $m \neq 0$ várható értékkel. Adjuk aszimptotikusan pontos becslést a $P\left(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - m| > \varepsilon\right)$ valószínűségre!

c.) Mit tudunk mondani a $P\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i > \sqrt{n}x\right)$ valószínűségről növekvő n esetén?

2. Biztosítótársaságot üzemeltetünk, január 1 van. Naponta, összesen, D biztosítási díj folyik be. Az i-edik napi káresemények költségét X_i valószínűségi változó modellezi. Szeretnénk, hogy legfeljebb p legyen annak valószínűsége, hogy az év végén nem áll a társaság kasszájában B összegű bevétel (0<B<365D). Mekkora napi D biztosítási díjbevétel szükséges? (napi káresemény $\Phi(m,\sigma)$ normális eloszlású).

3. Buffer méretezés összefüggést adunk nagy eltérés módszer segítségével. Egy egy-kiszolgálós sort tekintünk (FIFO). Az időegységenkénti inputot $X_1, X_2,...$ illetve outputot (kiszolgáló egységenkénti feldolgozó képességét) $Y_1, Y_2,...$ f.a.e. valószínűségi változó sorozat modellezi ($E(X_i) < E(Y_i)$). Adjunk aszimptotikusan pontos exponenciális becslést annak valószínűségére, hogy egy q méretű buffer túlcsordul, s ennek alapján vonjunk le méretezési összefüggéseket.

4. Egy n elemű rendszerben az elemek r különböző állapotot vehetnek fel, α diszkrét eloszlás szerint egymástól függetlenül, továbbá másodpercenként újrasorsolódik az állapotuk. Mutassuk meg, hogy annak valószínűsége, hogy az n elem állapotából kialakuló empirikus eloszlás egy β eloszlás ε sugarú környezetébe esik, n-ben exponenciálisan csökkenő valószínűségű, ahol az eloszlások r dimenziós euklideszi vektorok, továbbá ahol $0 < \varepsilon < |\alpha - \beta|$.

Bolyongások: Szimmetrikus bolyongás, tükrözési elv

1. Egy választás során A személy n szavazatot, B személy m szavazatot kap ($n>m$). Mekkora annak a valószínűsége, hogy A végig vezet a választás során?

2. Egy fagylalt ára 10Ft. A fagyisnál m+n ember áll ($m\geq n$) sorban, ahol m embernek csak 10Ft-os érméi, n embernek csak 20Ft-os érméi vannak. Ha véletlenszerű az emberek sorrendje, számoljuk ki annak valószínűségét, hogy senkinek sem kell majd visszajáró pénzre várakoznia.

3. Egy játékban B nyer 1Ft-ot, ha egy feldobott pénz fej oldalára esik, veszít egy 1Ft-ot, ha írás jön ki. Induláskor B zsebében 10Ft van.

a.) Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy az első n lépés során nem fut ki B a pénzéből?

b.) Ha B kölcsön tud kérni, adjunk becslést annak valószínűsége, hogy 100 lépés után legalább 20Ft van B zsebében!

4. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy a 3.feladatbeli játékos először az m-dik lépésben lesz újra kiinduló pénzénél úgy, hogy addig egyszer sem kellett a kiinduló tőkéjéhez nyúlnia. Mekkora a valószínűsége annak, hogy ez sohasem fordul elő?

Bolyongások: A differenciaegyenletek módszere

1. Alfonz és Béla pénzben játszik, ahol egy játszmában Alfonz p valószínűséggel nyer 1 Ft-ot, 1-p valószínűséggel veszít 1 Ft-ot, játszmánként függetlenül. Alfonz kezdeti vagyona z Ft Béláé v-z Ft, azaz összvagyonuk v Ft. A játék addig folyik, amíg valamelyik fél zsebében 0Ft marad.

a.) Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy Alfonz veszít!

b.) Határozzuk meg Alfonz várható nyereségét!

c.) Legyen Alfonznak 90 Bélának 10 Ft-ja kezdetben, továbbá legyen p=0.45. Valaki azt állítja, hogy Alfonz nyerési esélyei ilyenkor kedvezőtlenek, ugyanakkor ha megdupláznák a tétet (2Ft), akkor ez helyzet megfordulna. Igaz lehet ez?

2. Valaki azt a meglepő dolgot állítja, hogy ha pénzfeldobás játékot folytat Alfonz és Béla (p=0.5), annak ellenére, hogy Alfonznak 1000 Bélának meg csak 1 Ft-ja van kezdetben a játék várható időtartama 1000 lépés (?!!!). Ellenőrizzük ezt az állítást, az 1.feladatbeli általános paraméterezés mellett is vizsgálva a játék várható időtartamát!

3. Számoljuk ki a fentiekben bevezetett játékban Alfonz tönkremenése időtartama (valószínűség-eloszlása) generátorfüggvényét!

Markov láncok : A Markov modell

1. Legyenek ξ_t, t=1,2,… bináris független, azonos eloszlású valószínűségi változók, ahol $P(\xi_t = 1) = 1 - P(\xi_t = -1) = p$. Markov láncot képeznek-e a következő v.v. sorozatok:

a.) $\eta_t = \xi_t \xi_{t+1}$

b.) $\eta_t = \xi_1 \xi_2 ... \xi_t$

c.) $\eta_t = \Phi(\xi_t, \xi_{t+1})$, ahol $\Phi(-1,-1) = 1$, $\Phi(-1,1) = 2$, $\Phi(1,-1) = 3$, $\Phi(1,1) = 4$?

2. Igazoljuk, hogy a szokásos Markov-lánc „markovitás" tulajdonságával ekvivalens az a tulajdonság, hogy a jelen ismeretében a múlt és a jövő független egymástól:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ...X_{m-1} = i_{m-1}, X_{m+1} = i_{m+1}, ..., X_{m+n} = i_{m+n} \mid X_m = i_m) =$$
$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, ...X_{m-1} = i_{m-1} \mid X_m = i_m)\ P(X_{m+1} = i_{m+1}, ..., X_{m+n} = i_{m+n} \mid X_m = i_m)$$

3. Két tartályunk van, A és B, összesen 2a labdát tartalmaz. Induláskor A tartályban k db, B tartályban 2a-k db labda van (|A|=k, |B|=2a-k). Minden lépésben véletlenszerűen választunk egy labdát az összes labda közül, és áttesszük a másik tartályba. Adjuk meg az (|A|-|B|)/2 differencia Markov modelljét (állapottér, valószínűség-átmenet mátrix)!

4. Egy raktárban, ha a készlet mérete az i-edik periódus végére s érték alá esik, akkor a következő periódus elejére S méretre emelik azt. Periódusonként f.a.e. igény érkezik, az i-edik periódusban ξ_i igény. Adjuk meg X_i, az i-edik periódus végén a készlet mérete Markov modelljét!

5. Egy egy-kiszolgálós rendszerben minden egyes időperiódusban egy igény kerül kiszolgálásra. Periódusonként beérkező igénye független, azonos eloszlású valószínűségi változók, ahol az i-edik periódusban ξ_i igény érkezik, ahol ξ_i a 0,1,… értékeit pozitív valószínűséggel veszi fel. Adjuk meg az X_i az i-edik periódus elején a várakozó sorhossz Markov modelljét! Irreducibilis-e a Markov lánc?

6. Vizsgáljuk a visszatérőség tulajdonságot egydimenziós bolyongás feladatban. Egyrészt emlékezhetünk a differenciaegyenletek módszerénél vizsgált tönkremenés problémájára, másrészt közvetlenül is vizsgálhatjuk a kérdést kiszámolva a $P_{0,0}^k$, k=0,1,… állapotátmenet valószínűségeket és felhasználva azt a tételt, miszerint egy i állapot akkor és csak akkor visszatérő, ha $\sum_{k=0}^{\infty} P_{i,i}^k = \infty$.

Markov láncok : Eloszlások, ergodicitás

1. Legyen ξ_t, t=1,2,… Markov lánc állapotainak halmaza az $\{1,2,3\}$ halmaz, átmenetvalószínűség-mátrixa $\{p_{ij}\}$ és stacionér eloszlása π_j. Mutassuk meg, hogy ha $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 0$ és $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/3$, akkor $p_{12} = p_{23} = p_{31}$ és $p_{13} = p_{21} = p_{32}$.

2. Egy játékkockát azonos valószínűséggel, és az előző mozgásoktól függetlenül, folyamatosan átfordítjuk az egyik oldaláról a négy szomszédos oldal valamelyikére. $n \to \infty$ esetén milyen határértékhez tart annak a valószínűsége, hogy az n-edik forgatás után a kocka a “6” oldalára kerül, ha kezdetkor is ezen az oldalán állt?

3. Legyen egy víztároló köbtartalma K. Minden évben azonos M mennyiségű vizet veszünk ki a tárolóból. A folyó t-edik évben f.a.e. ξ_t mennyiségű vizet hoz, ami túlcsordul, ha megtelik a tároló. Egyszerűsítésül feltehetjük, hogy a folyó oldali betöltés a kivétel előtt befejeződik. A tárolóban levő víz mennyiségét a kivét után jelölje η_t. Legyen $p_i = P(\xi_t = i)$, i=0,1,2… a betöltési eloszlás, továbbá $P(\xi_t \geq K) > 0$. Markov láncot alkot-e η_t, t=1,2,… . A feladat a tároló méretezése azon feltétel mellett, hogy egy $P(\eta_t \leq m)$ valószínűséget szeretnénk beállítani elfogadható értékre, ahol m a kritikusan kevés vízmennyiségnek feleljen meg.

4. Legyen ξ_t, t=1,2,… Markov lánc állapotainak száma n+1, az átmenet-valószínűségek a következők: $p_{ii} = 1-\alpha$, i=1,2,…,n+1; $p_{ij} = \alpha / n, \quad i \neq j$. A folyamat egy $k,\ k \neq n+1$ állapotból indul. Jelölje τ_n azt az időpontot, amikor a folyamat először kerül az n+1 –edik állapotba. Adjuk meg olyan b_n, ($b_n \to \infty,\ n \to \infty$) számsorozatot, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\tau_n}{b_n} < x\right)$$

határérték (határeloszlás) létezzen, és számítsuk ki ezt a határértéket.

Pontfolyamatok: Poisson folyamat

(Segédtétel) Tekintsünk egy Poisson pontfolyamatot. Az egymás utáni történések közti időtartamok akkor és csak akkor lesznek független, azonos paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, ha a folyamat homogén Poisson.

1. Egy, λ=10 hívás/óra intenzitású Poisson folyamat szerint futnak be a telefonhívások. 30 percig regisztráljuk a hívások számát, ami 4 lett. Adjuk meg a két középső hívás időbeli távolságának eloszlásfüggvényét!

2. Egy mellékútvonalról a főútvonalon áthaladni kívánó autó vezetője megvárja, amíg legalább 10 sec időtartamú rés keletkezik a főútvonali forgalomban. A főútvonalon a két ellentétes irányú forgalom mindegyikén az egymást követő autók érkezési időpontjai közötti idő várható értéke 5 sec, független Poisson folyamat modellel modellezhetők. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 autót kell megvárni áthaladásig?

3. Egy szerver FIFO elven szolgálja ki a feladatokat. A feladatok λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek, az egyes feladatok kiszolgálási ideje független és exponenciális eloszlású μ paraméterrel. Egy feladat kiszolgálása alatt mennyi a sorhossz növekedés várható értéke?

4. Jelölje H az égboltnak azt a részét, ami 10 fényévnél távolabb van tőlünk, de 20 fényévnél közelebb. Tegyük fel, hogy egy köbfényévnyi térrészbe várhatóan 1 csillag esik, és minden csillag egyforma fényességű. Egy 10 fényévre levő csillag fényereje egységnyi nagyságúnak látszik. Mi a H-ból a szemünkbe jutó fény erejének várható értéke, szórásnégyzete?

Pontfolyamatok: Várakozási paradoxonok

1. 0 időpontban indul időbeli történések független, exponenciális eloszlás szerinti differenciájú sorozata, azaz legyenek $X_1, X_2, ...$ független, azonos exponenciális eloszlású valószínűségi változók és $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ időpontban következik be az n-edik történés. Ha valaki pl. azt kérdezi, hogy mekkora a várható értéke az n+1-edik és az n-edik történés közötti várakozási időnek valamely n esetén, azt válaszoljuk, hogy az X_{n+1} valószínűségi változóra kérdeztünk rá, tehát $1/\lambda$ a válasz, ahol λ az exp. eloszlás közös paramétere. Ugyanezt válaszoljuk-e, ha úgy bökünk ki egy differenciát, hogy rögzítünk valamely t időpontot, s a kérdés, hogy mit tudunk mondani L_t differencia várható értékéről, ahol $L_t = S_{k-1} - S_k$, $S_{k-1} < t \leq S_k$. Nem X_k-ról van szó?!

2. Hosszú egysávos, egyirányú hegyi út indulópontjához független, azonos eloszlású valószínűségi változóval modellezhető sebességgel érkeznek az autók. Ha egy autó utolér egy másikat beáll mögé, nem tud előzni. Mi is vezetünk egy autót. Kérdés, hogy a mögöttünk esetlegesen feltorlódható sornak mi a várható értéke?

3. Postahivatalba egyszerre érkezik A,B,C személy, ahol két ablak van nyitva és szabad éppen. A és B beállnak az ablakokhoz C várakozik.
a.) Mi a valószínűsége, hogy nem C jön ki utoljára a postáról?
b.) Mennyi C várható várakozási ideje. Mi az eloszlása C által a postán eltöltött időnek? (kiszolgálási idők független, azonos exponenciális eloszlású, λ paraméterű valószínűségi változók)

4. Ketten egyszerre érkezünk a postára, két kiszolgáló ablak van és éppen mindegyik előtt áll egy-egy személy kiszolgálás alatt. Mekkora a valószínűsége, hogy legalább kétszer (t-szer) annyit időt kell várnom, mint az akivel együtt érkeztem?

5. Két sávos út vezet be Pestre, mindegyiken azonos hosszú nagy kocsisor van, amikor két gépkocsi megérkezik, s egyik az enyém, s én az egyik, a másik a másik sorba áll be. Figyeljük egymást, hogy melyikünk állt "jobb" sorba. Hol, hol ő, hol én kerülök egy-egy kocsival előbbre, hátra egy-egy lépésben. Mekkora a várható értéke annak az időtartamnak, hogy legalább m kocsi hossznyi előnyre teszek szert?

Pontfolyamatok: Rekurrens folyamatok, a felújítási elmélet módszere

1. Tekintsünk egy B rekurrens eseményt. Legyen
u_n=P{B bekövetkezik az n-edik kísérletben}
f_n=P{B először az n-edik kísérletben következik be}
n=0,1,2,… , továbbá u_0=1, f_0=0. Adott f_n, $n=1,2,...$ esetén számítsuk ki u_n, $n=1,2,...$ sorozatot.

2. "Lekéstük a véletlen kísérletsorozat elejét", és valamikor már érkezésünk előtt volt már B eseménnyel kapcsolatos bekövetkezés. Annak a valószínűségét, hogy megfigyelésünk megkezdésétől számítva az első bekövetkezés az n-edik lépésben történik meg, jelölje b_n, n=1,2,… . Ennek bekövetkezte után az 1. feladat szerinti rekurrens esemény folyamat indul el (azaz késleltetett rekurrens eseményt tekintünk). Adott f_n, b_n, $n=1,2,...$ esetén számítsuk ki v_n, $n=1,2,...$ sorozatot, valamint adjuk meg a generátorfüggvényeik kapcsolatát.

(3. A felújítási tétel, mint számítási segédtétel kimondása.)

4. Tekintsük az 1. feladatbeli B rekurrens eseményt. Tegyük fel, hogy (determinisztikus) m-edik lépéstől kezdve figyeljük a folyamatot. A 3.pontban kimondott felújítási tétel felhasználásával számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy a megfigyelés megkezdésétől számított r-edik lépésben következik be az esemény, ha $r \to \infty$ (a várakozási idő határeloszlását).

5. Egy cégnek N darab azonos típusú gépkocsiból álló flottája van. Ha komolyabb felújításra szorulna valamelyik , akkor azt eladják és újra cserélik. Tegyük fel, hogy az egyes gépkocsik cseréi időfolyamatát rekurrens eseménnyel modellezzük a következőképp: a 0-dik pillanatban k életkorú autóból e_k darab van ($\sum_k e_k = N$). Számítsuk ki az n-edik pillanatban szükséges autócserék várható számát, ha $n \to \infty$. Számítsuk ki a koreloszlás határeloszlását.

Határeloszlások számítása: Direkt módszerek

1. Egy ξ valószínűségi változó az [a,b] zárt intervallumban vesz fel értékeket, sűrűségfüggvénye folytonos és korlátos. Legyen $\eta_n = \{n\xi\}$, ahol {y} az y valós szám törtrészét jelöli. Számoljuk ki a $\lim_{n\to\infty} P(\eta_n \le x)$ határértéket!

2. A $\xi_1, \xi_2, \ldots$ és $\eta_1, \eta_2, \ldots$ egész értékeket felvevő, valószínűségi változó sorozatokra, valamint $a_1, a_2, \ldots.$ és $b_1, b_2, \ldots.$ ($b_n \to \infty$, *ha* $n \to \infty$) számsorozatokra teljesül, hogy

$$P\left(\frac{\xi_n - a_n}{b_n} \le x\right) \underset{n}{\to} F(x),$$ továbbá

$$\max_{k:|a_n - k| < Ab_n} \left| \frac{P(\xi_n = k)}{P(\eta_n = k)} - 1 \right| \underset{n}{\to} 0$$

ahol $A < \infty$ tetszőleges. Mutassuk meg, hogy

$$P\left(\frac{\eta_n - a_n}{b_n} \le x\right) \underset{n}{\to} F(x).$$

3. A 2. feladat módszere valamint a centrális határeloszlás tétel felhasználásával mutassuk meg, hogy egy $\eta_1, \eta_2, \ldots$ Poisson-eloszlású valószínűségi változó sorozatra, ahol $P(\eta_n = k) = \frac{n^k}{k!} e^{-n}, k = 0, 1, \ldots,$ normális határeloszlás adódik:

$$P\left(\frac{\eta_n - n}{\sqrt{n}} \le x\right) \underset{n}{\to} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy.$$

4. Egy raktárba percenként és függetlenül, $\lambda = 2$ paraméterű Poisson eloszlás szerint érkeznek alkatrészek, a raktár kapacitása 150 alkatrész, s a raktárt óránként ürítik. A 3. feladat eredményének felhasználásával becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 100 óra alatt egyszer sem lesz raktározási gond.

5. A $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változó sorozat elemei q_n paraméterű, geometriai eloszlású valószínűségi változók, $q_n \to 0$. Számoljuk ki $\eta_n = q_n \xi_n$ valószínűségi változók határeloszlását, $n \to \infty$.

Határeloszlások számítása: A Ljapunov módszer

(Segédtétel) Az $F_n(x)$, n=1,2,… eloszlásfüggvények akkor és csak akkor konvergálnak egy $F(x)$ eloszlásfüggvényhez $F(x)$ minden folytonossági pontjában, ha az $F_n(x)$ eloszlásfüggvények $\varphi_n(x)$ karakterisztikus függvényei $n \to \infty$ esetén olyan $\varphi(x)$ függvényhez konvergálnak, amely a t=0 pontban folytonos. Ebben az esetben $\varphi(x)$ az $F(x)$ karakterisztikus függvénye.

1. Egy ξ (n, p) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változót milyen feltétel mellett tudunk dekomponálni $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_m$ alakba, ahol a tagok független (n_i, p_i) paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változók?

2. A ξ egész értékeket felvevő valószínűség változó karakterisztikus függvénye $f(t)$. Számítsuk ki a következő valószínűséget: $P(\xi \equiv m \pmod k)$.

3. Legyenek $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, ..., \xi_n^{(n)}$, n=1,2,… független, azonos eloszlású valószínűségi változók $P(\xi_j^{(n)} = \sqrt{n}) = P(\xi_j^{(n)} = -\sqrt{n}) = \frac{1}{2n}$, $P(\xi_j^{(n)} = 0) = \frac{n-1}{n}$, j=1,2,…,n.
Számítsuk ki $\eta_n = \frac{\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + ... + \xi_n^{(n)}}{\sqrt{nD^2(\xi_1^{(n)})}}$ valószínűségi változó határeloszlását $n \to \infty$ esetén.

4. Legyen ξ_λ λ várható értékű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. A karakterisztikus függvények módszerével mutassuk meg, hogy

$$\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $\lambda \to \infty$ esetén a normális eloszlás eloszlásfüggvényéhez tart.

5. 4. Legyen ξ_n n-edrendű gamma-eloszlású valószínűségi változó, és legyen $E(\xi_n) = \frac{n}{\lambda}$. Mutassuk meg, hogy

$$\sqrt{n}\left(\frac{\lambda \xi_n}{n} - 1\right)$$

valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $n \to \infty$ esetén a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényhez tart.

Martingálok: Martingál megállítása, a véletlen választás tétele

1. F forinttal kezdünk egy játékot. Minden lépésben a rendelkezésre álló pénzünk q-szorosát (q<1) kockáztatjuk, és 0.5-0.5 valószínűséggel elvesztjük vagy ugyanannyit nyerünk. A játék n lépése után S_n a rendelkezésre álló pénzünk. Mutassuk meg, hogy $\{S_n\}$ martingál.

2. Egy populáció n-edik generációjában jelölje X_n a férfiak és Y_n a nők számát. Az egyedek állandó párokat alkotnak, így $Z_n = \min\{X_n, Y_n\}$ pár hoz létre utódokat, egymástól függetlenül. Egy pár utódjai között ξ a fiú és η a lány. Mutassuk meg, hogy Z_n szupermantingál, ha vagy $E\xi \leq 1$ vagy $E\eta \leq 1$.

3. Számegyenesen tekintünk bolyongást: origóból indulunk, lépésenként függetlenül +1 lépést tesszük p illetve -1 lépést tesszük 1-p valószínűséggel. Jelölje $S_n = Y_1 + Y_2 ... + Y_n$ a helyzetet n lépés után, ahol Y_i az i-edik lépés ($S_0 = 0$). Mutassuk meg, hogy $X_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ martingál.

4. Tekintsük a 3.feladatbeli bolyongást. Jelölje T azt a lépésszámot, amíg a bolyongás először eléri c vagy -d (c,d>0) értéket. A véletlen választás tételének (és a 3.feladat eredményének) felhasználásával számoljuk ki T várható értékét.

Martingálok: Martingálok konvergenciája

1. Legyenek $\xi_1, \xi_2, ...$ f.a.e. v.v-k véges várható értékkel ($E(|\xi_k|) < \infty$). Mutassuk meg, hogy a $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{2^i}$ sor 1 valószínűséggel konvergens.

2. Tekintsünk egy Y_n elágazó folyamatot, ahol az utódeloszlás várható értéke $m < \infty$ (1 egyedből indulunk). Mutassuk meg, hogy $X_n = m^{-n} Y_n$ martingál, továbbá, hogy 1 valószínűséggel konvergál. Értelmezzük az eredményt.

3. Egy urnában 1 piros és 1 fehér golyó van. Amilyen színű golyót húzunk, azzal együtt még egy ugyanolyan színűt teszünk vissza. Mutassuk meg, hogy a piros golyók X_n aránya az n-edik lépésben 1 valószínűséggel konvergens martingál.

4. Legyenek $\xi_1, \xi_2, ...$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók f(x) sűrűségfüggvénnyel. Legyen g(x) egy másik sűrűségfüggvény. Mutassuk meg, hogy a $\prod_{i=1}^{n} \frac{g(\xi_i)}{f(\xi_i)}$ maximum likelihood hányados martingált alkot, továbbá, hogy 1 valószínűséggel 0-hoz tart.

5. Legyenek a Markov lánc állapotai 0,1,…,m. Egy Markov lánc martingál, ha minden j-re $\sum_{k=0}^{m} p_{jk} k = j$. Mutassuk meg, hogy $p_{00} = p_{mm} = 1$. Mutassuk meg, hogy az i állapotból indulva a lánc 1-i/m illetve i/m valószínűséggel kerül a 0 illetve az m elnyelő állapotba.

Sztochasztikus differenciálkalkulus: Ito-integrál, Ito-formula

1. Ito-integral definiciója: appproximáció sztochasztikus lépcsősfüggvényekkel.

a.) Igazoljuk –vázlatosan- hogy egy $h(t,\omega)$ adaptált sztochasztikus lépcsősfüggvény Ito integrálja martingál.

b.) Számoljuk ki az alábbi integrált az Ito integrál definícióját használva:

$$\int_0^1 W_s dW_s$$

ahol $\{W_t\}_{t\geq 0}$ standard Wiener folyamat.

2. Ito-formula
a.) Végezzük el az Ito-formula -vázlatos- levezetését.

Az Ito-formula felhasználásával számoljuk ki $u(W_t,t)-u(0,0)$ folyamatot integrál illetve differenciális alakban, ha

b.) $u(x,t)=x^2-t$
($u(x,t)=x^2$ mellett oldjuk meg 1.b) feladatot az Ito-formula segítségével is)

c.) Mutassuk meg, hogy $Z_t=e^{-rt}S_t$ folyamat kielégíti a $dZ_t/Z_t=(\mu-r)dt+\sigma dW_t$ egyenletet, ha $dS_t/S_t=\mu dt+\sigma dW_t$ (geometriai Brown mozgás).

3. Tekintsük a geometriai Brown mozgás 2.c. feladatbeli differenciálegyenletét. Az Ito-formula felhasználásával mutassuk meg, hogy a megoldás a következő alakú:

$$S_t=S_0\exp\left\{(\mu-\tfrac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t\right\}$$

4. Az Ito-formula felhasználásával mutassuk meg, hogy

a.) $EW(t)^k=\frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t EW(s)^{k-2}ds$

b.) Használjuk a kapott formulát a normális eloszlás első 10 momentuma kiszámítására.

Sztochasztikus differenciálkalkulus: Black-Scholes egyenlet és a tőzsdei derivativok

1.
a.) Vezessük le az Ito-formulát – vázlatosan – egy x(t) Ito-folyamat G(x,t) idővariáns függvényére (G folytonos és mindkét változójában kétszer differenciálható).

b.) Az Ito-formula alkalmazásával mutassuk meg, hogy a részvényárak lognormális eloszlást követnek.

2.
Néhány fogalom bevezetése: short selling, portfolio, forward- , futures-, opciós (call, put) –ügylet, folyamatos kamatszámítás, kockázat-mentes hozam, arbitrázs

a.) Vezessük le az Black-Scholes egyenletet - vázlatosan –.

b.) Alkalmazzuk a Black-Scholes egyenletet forward (tőzsdén kívüli határidős) ügyletek árazására.

3.
a.) A Black-Scholes egyenlet alapján vezessük be a kockázat-semleges kiértékelési módszert (risk neutral valuation), s demonstráljuk azt

b.) a 2b.) feladatbeli forward ügyletek
c.) európai call opciók

árazása esetére.